

**DLR-IB-AS-BS-2020-21**

**Lineares Mehrgitter zum Lösen der  
RANS Gleichungen**

**Forschungsbericht**

Autor  
Jörn Niklas Kersken



**DLR**

**Deutsches Zentrum  
für Luft- und Raumfahrt**



**DLR-IB-AS-BS-2020-21**

**Lineares Mehrgitter zum Lösen der RANS  
Gleichungen**

**Jörn Niklas Kersken**

**Herausgeber:**

Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt e.V.  
Institut für Aerodynamik und Strömungstechnik  
Lilienthalplatz 7, 38108 Braunschweig

**ISSN 1614-7790**

Stufe der Zugänglichkeit: 1  
Braunschweig, im Februar 2020

Institutsdirektor:  
Prof. Dr.-Ing. habil. C.-C. Rossow

Verfasser:  
Jörn Niklas Kersken

Abteilung: Center of Computer Applications in  
Aerospace Science and Engineering

Abteilungsleiter:  
Prof. Dr. S. Görtz

Der Bericht enthält:  
90 Seiten  
32 Bilder  
2 Tabellen  
26 Literaturstellen



# Inhaltsverzeichnis

<b>Nomenklaturverzeichnis</b>	<b>vi</b>
<b>1 Einleitung</b>	<b>1</b>
1.1 Motivation . . . . .	1
1.1.1 Problematik . . . . .	1
1.1.2 Lösungsansatz . . . . .	1
1.2 Stand der Technik . . . . .	2
1.3 Vorgehen . . . . .	2
<b>2 Theoretische Grundlagen</b>	<b>3</b>
2.1 Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	3
2.2 Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen . . . . .	4
2.3 Euler-Gleichungen . . . . .	8
2.4 Turbulenzmodell: Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras . . . . .	9
2.5 Randwertproblem und Randbedingungen . . . . .	10
2.6 Diskretisierung und Finite-Volumen-Verfahren . . . . .	12
2.7 Approximatives Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems mittels Runge-Kut- ta-Verfahren . . . . .	16
2.7.1 Inneres Lineares Gleichungssystem . . . . .	18
<b>3 Lösen des linearen Gleichungssystems</b>	<b>21</b>
3.1 Lineare Iterationsverfahren . . . . .	21
3.2 Mehrgitterverfahren . . . . .	28
<b>4 Methodik</b>	<b>37</b>
4.1 Parametervariation . . . . .	38
4.1.1 CFL-Zahl . . . . .	38
4.1.2 Glätter im linearen Mehrgitter . . . . .	38
4.1.3 Mehrgitterzyklen . . . . .	40
4.1.4 Abbruchkriterien . . . . .	40
4.1.5 Parameter des impliziten Runge-Kutta-Verfahrens . . . . .	40
4.1.6 Einige konstant gehaltene Parameter . . . . .	40
4.1.7 Referenz . . . . .	41
4.2 Zeitmessung und Automatisierung der Variation zur Datengenerierung . . . . .	41
4.3 Auswertemethoden . . . . .	43

<b>5</b>	<b>Testfälle und Ergebnisse</b>	<b>45</b>
5.1	Testfälle . . . . .	45
5.1.1	Laminarer Testfall NACA 0012 . . . . .	45
5.1.2	Turbulenter Testfall RAE 2822 . . . . .	46
5.1.3	Hardware Spezifikation . . . . .	46
5.1.4	Nichtlineares Konvergenzverhalten . . . . .	47
5.2	Ergebnisse . . . . .	48
5.2.1	Ergebnisse: Laminarer 2D Testfall NACA 0012 . . . . .	50
5.2.1.1	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 2v-Mehrgitterzyklus mit 128 x 64 Startgitter . . . . .	50
5.2.1.2	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 3v-Mehrgitterzyklus mit 128 x 64 Startgitter . . . . .	51
5.2.1.3	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 4v-Mehrgitterzyklus mit 128 x 64 Startgitter . . . . .	53
5.2.1.4	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 2v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter . . . . .	54
5.2.1.5	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 3v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter . . . . .	55
5.2.1.6	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 4v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter . . . . .	56
5.2.1.7	Block-symmetrischer-Linien-Gauß-Seidel-Glätter im 2v, 3v und 4v-Mehrgitterzyklus mit 128 x 256 Startgitter . . . . .	57
5.2.1.8	Block-symmetrischer-Linien-Gauß-Seidel-Glätter im 2v, 3v und 4v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter . . . . .	59
5.2.2	Ergebnisse: Turbulenter 2D Testfall RAE 2822 . . . . .	61
5.2.2.1	Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 2v- und 3v-Mehrgitterzyklus mit 320 x 64 Startgitter . . . . .	61
5.2.2.2	Block-symmetrischer-Linien-Gauß-Seidel-Glätter im 2v-, 3v- und 4v-Mehrgitterzyklus mit 320 x 64 Startgitter . . . . .	62
<b>6</b>	<b>Auswertung und Beurteilung</b>	<b>65</b>
6.1	Verschiedene Trends . . . . .	65
6.1.1	Abbruchkriterium I) und II) . . . . .	65
6.1.2	Linieninformationen . . . . .	66
6.1.3	Lineares Mehrgitterverfahren . . . . .	66
6.2	Beurteilung . . . . .	66
<b>7</b>	<b>Zusammenfassung und Ausblick</b>	<b>67</b>
	<b>Abbildungsverzeichnis</b>	<b>70</b>
	<b>Tabellenverzeichnis</b>	<b>75</b>

# Nomenklaturverzeichnis

## Abkürzungen

CFL	<u>C</u> ourant- <u>F</u> riedrichs- <u>L</u> evy-Bedingung
DLR	<u>D</u> eutsches Zentrum für <u>L</u> uft- und <u>R</u> aumfahrt
DNS	<u>D</u> irect <u>N</u> umerical <u>S</u> imulation
RANS	<u>R</u> eynolds <u>a</u> veraged <u>N</u> avier- <u>S</u> tokes equations
SA	Eingleichungsmodell nach <u>S</u> palart und <u>A</u> llmaras

## Griechische Formelzeichen

$\alpha_{jl}$	Koeffizient des Runge-Kutta-Verfahrens = $\alpha_{11} \dots \alpha_{ss}$
$\tau_t$	Reynolds-Spannungs-Tensor
$\kappa$	Isentropenexponent (für Luft: $\kappa = 1,4$ )
$\lambda_{eff}$	effektive Wärmeleitfähigkeit
$\lambda_{lam}$	laminare Wärmeleitfähigkeit
$\lambda_t$	turbulente Wärmeleitfähigkeit
$\mu_{eff}$	effektive, dynamische Viskosität
$\mu_{lam,\infty}$	Referenzviskosität
$\mu_{lam}$	laminare, dynamische Viskosität
$\mu_t$	turbulente Wirbelviskosität
$\nu$	kinematische Viskosität
$\nu_t$	turbulente, kinematische Viskosität
$\Omega$	Kontrollvolumen
$\omega$	Relaxationsparameter
$\Psi$	druckbasierte Sensorfunktion
$\rho$	Dichte
$\tau_{ii}$	Normalspannung
$\tau_{ij}$	Schubspannung
$\theta_i$	Kombination aus Reibungsleistung und Wärmestromdichte

$\tilde{\nu}$  Wirbelvisositäts-Variable

$\varepsilon$  Relaxationsparameter

### Indizes

$\infty$  Größe der freien Anströmung/ äußerer Randwert

$J, J - 1, \dots$  Gitterlevel

$l$  laminar

$t$  turbulent

### Lateinische Formelzeichen

$\dot{q}_s$  spezifischer Energiestrom

$\mathbf{A}^{\text{Roe}}$  Roe-Matrix

$\mathbf{A}_{\text{sys}}$  Systemmatrix

$\mathbf{B}$  invertierbare Matrix

$\mathbf{C}_{\text{app}}$  approximative Inverse

$\mathbf{D}$  Diagonalmatrix

$\mathbf{I}$  Einheitsmatrix

$\mathbf{L}$  strikte obere Dreiecksmatrix

$\mathbf{M}_{\text{iter}}$  Iterationsmatrix

$\mathbf{M}_{\text{mean}}$  Hauptströmungs-Massenmatrix

$\mathbf{M}_{\text{turb}}$  Turbulenz-Massenmatrix

$\mathbf{Prec}_s$  Vorkonditionierer

$\mathbf{R}$  strikte untere Dreiecksmatrix

$\mathbf{Tri}_{Li}$  Block-Tridiagonalmatrix entlang einer Linie

$\bar{T}$  Sutherland-Konstante

$\vec{r}_J$  Näherungslösung auf dem Gitterlevel  $J$

$\vec{b}$  rechte Seite des linearen Modellproblems

$\vec{d}_J$  rechte Seite der Defektgleichung des Gitterlevels  $J$

$\vec{D}$  matrixgewichtete, künstliche Dissipation

$\vec{e}_J$  Fehler/Defekt des Gitterlevels  $J$

$\vec{f}_c$  konvektiver Flussdichtetensor

$\vec{f}_v$  viskoser Flussdichtetensor



---

$\vec{h}_j$	approximative Lösung des inneren, linearen Gleichungssystems
$\vec{k}$	Volumenkraft = $[\vec{k}_x, \vec{k}_y, \vec{k}_z]^T$
$\vec{n}$	äußerer Einheitsnormalenvektor
$\vec{P}_j$	Vorkonditionierer
$\vec{q}$	Wärmestromdichtevektor = $[\vec{q}_x, \vec{q}_y, \vec{q}_z]^T$
$\overrightarrow{R_{mean}}$	Residuum der Hauptströmungsgleichung
$\overrightarrow{R_{turb}}$	Residuum der Turbulenzgleichung
$\vec{r}$	Lösungsvektor
$\vec{W}$	Vektor der konservativen Variablen
$\vec{W}^\dagger$	Lösungsfunktion
$\vec{x}$	Ortsvektor
$a$	Schallgeschwindigkeit
$C$	Zelle
$c_p$	spezifische Wärmekapazität
$D$	feststehendes, umströmtes Gebiet
$dS$	Oberflächenelement
$E$	spezifische, totale Energie
$e$	innere Energie
$f$	beliebige Funktion
$f_{v1}$	Formel-Platzhalter
$g$	beliebige Funktion
$H$	spezifische, totale Enthalpie
$h$	Gitterweite
$i$	Zählvariable
$j$	Zählvariable
$k$	Gitterlevel
$L$	charakteristische Abmessung
$Li$	Linie
$m$	Iterationsvariable
$Ma$	Machzahl

$N$	Anzahl
$n$	Zählvariable
$N_k$	Mächtigkeit von $\mathcal{N}$
$p$	Druck
$P_J$	linearer Transferoperator für Prolongation
$P_J$	linearer Transferoperator
$Pr_{lam}$	laminare Prandtl-Zahl
$Pr_{turb}$	turbulente Prandtl-Zahl
$Q$	Quellterm des SA-Modells
$R$	spezifische Gaskonstante
$R_J$	linearer Transferoperator für Restriktion
$s$	Zelldehnungskoeffizient
$T$	Temperatur
$t$	Zeit
$u$	Geschwindigkeit in x-Richtung = $u_x$
$V$	Gesamtgeschwindigkeit
$v$	Geschwindigkeit in y-Richtung = $u_y$
$V_\infty$	Anströmgeschwindigkeit
$V_{ij}$	Normalgeschwindigkeit
$w$	Geschwindigkeit in z-Richtung = $u_z$
$W_t$	Trubulenzgleichung
$x$	Koordinatenrichtung
$y$	Koordinatenrichtung
$z$	Koordinatenrichtung

### Mathematische Operatoren und Symbole

$\mathbb{N}$	natürliche Zahlen
$\mathbb{R}$	reelle Zahlen
$\mathcal{G}$	Position im Dualgitter
$\mathcal{M}$	Multitriangulierung
$\mathcal{N}$	Nachbarpunkte
$\mathcal{O}$	Landau-Symbol zur Angabe einer Größenordnung des Aufwands eines Problems
$\mathcal{T}$	Triangulierung

# Übersicht

In der folgenden Arbeit werden die nichtlinearen Gleichungssysteme, die beim Diskretisieren von Randwertproblemen der Navier-Stokes-Gleichungen entstehen, approximativ gelöst. Dazu verwendet wird ein Lösungsalgorithmus der auf einem diagonal impliziten mehrstufigen Runge-Kutta-Verfahren aufbaut. Es wird kein nichtlineares Mehrgitter verwendet und für die Untersuchungen wird lediglich der Fall eines einstufigen Runge-Kutta-Verfahrens gewählt. Nach Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems ergibt sich ein inneres lineares Gleichungssystem, dessen Operator durch Verwendung einer kompakten Diskretisierung approximiert wird. Pro nichtlinearen Iterationsschritt wird dieses innere lineare Gleichungssystem durch ein lineares Mehrgitterverfahren approximativ gelöst und die approximierte Lösung wird in den äußeren nichtlinearen Lösungsalgorithmus eingespeist.

Untersucht wird die Laufzeit der Lösungsalgorithmen für verschiedene Abbruchkriterien und Parametervariationen. Es wird die Anzahl an zugelassener Glättungsschritte im linearen Mehrgitterzyklus variiert, sowie das Kriterium für das lineare Residuum je nichtlinearen Iterationsschritt. Des Weiteren werden die Mehrgitterzyklen des linearen Mehrgitterverfahrens variiert. Die gemessenen Laufzeiten werden für einen laminaren NACA 0012 Testfall mit  $128 \times 64$  sowie  $256 \times 128$  Rechengitter und einen turbulenten RAE 2822 Testfall mit  $320 \times 64$  Rechengitter diskutiert.



# 1 | Einleitung

Nachdem mittels der Übersicht ein erster Einblick in diese Arbeit geschaffen wurde, wird die Motivation vorgestellt, die hinter den später folgenden Untersuchungen steht.

## 1.1 | Motivation

Strömungen sind allgegenwärtig. Beim Ein- und Ausatmen erfährt es jeder am eigenen Körper. Im Auto oder auf dem Rad spürt sie jeder morgens auf dem Weg zur Arbeit. Mit dem Flugzeug oder Schiff begleiten sie jeden beim Reisen.

Nicht selten trifft Technik aus dem Bereich des Ingenieurwesens auf Umströmungen oder beinhaltet Innenströmungen. Für die Entwicklung heutiger Computertechnik, Geräte, Apparaturen, Fortbewegungsmittel und selbst statisch wirkender Gebäude ist eine Auslegung bezüglich vorherrschender Strömungen nicht mehr wegzudenken. Dabei werden zunehmend mehr experimentelle Untersuchungen durch Strömungssimulationen ersetzt oder komplementiert.

### 1.1.1 | Problematik

Häufig sind die zu Grunde liegenden mathematischen Modelle nicht analytisch lösbar. Bei Strömungen sind Gleichungen der Familie der Navier-Stokes-Gleichungen ein weit verbreitetes mathematisches Modell zur Approximation von Strömungsproblemen. Die Existenz von Lösungen der Navier-Stokes-Gleichungen sowie Euler-Gleichungen ist immer noch ein offenes Problem, vergleiche [1]. Daher sind numerische Methoden zu Rate zu ziehen.

Die Diskretisierung von Randwertproblemen, die mittels der oben genannten mathematischen Modelle formuliert werden, führt im Allgemeinen zu einem nichtlinearen Gleichungssystem. Linearisiert man dieses nichtlineare Gleichungssystem, dann sind die resultierenden linearen Gleichungssysteme meist groß und aufwendig zu lösen. Häufig können sie lediglich iterativ, approximativ gelöst werden. Einfache lineare Iterationsverfahren wie Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren haben den Nachteil, dass ihr Rechenaufwand überproportional zur Anzahl der Unbekannten anwächst, wenn die Gitterweite abnimmt. [2]

Hinzu kommt, dass nur begrenzte Rechenleistung verfügbar ist und das Moore'sche Gesetz an seine Grenzen stößt, siehe [3]. Es werden somit Beschleunigungsmechanismen und effiziente Lösungsalgorithmen benötigt.

### 1.1.2 | Lösungsansatz

Mehrgitterverfahren stellen ein mögliches Beschleunigungsverfahren dar. Bei ausgewählten Modellproblemen besitzen Mehrgitterverfahren quasioptimale Komplexität, sodass die Konvergenzrate gar nicht oder höchstens logarithmisch von der aktuellen Gitterweite abhängt. [2] Eine mögliche Herangehensweise ist, dass die verwendeten Mehrgitterverfahren und ihre verfügbaren Parameter so abgestimmt werden, dass das nichtlineare System partieller Differentialgleichungen mittels geeigneter Algorithmen effektiv, approximativ gelöst werden kann.

## 1.2 | Stand der Technik

Mittels der nichtlinearen Systeme von partiellen Differentialgleichungen werden Randwertprobleme formuliert, die dann diskretisiert, linearisiert und im Anschluss, durch Verwendung geeigneter Algorithmen, approximativ gelöst werden. Es gibt zahlreiche Varianten die dabei auftretenden, großen, linearen Gleichungssysteme zu lösen. Gängige Verfahren sind iterative Verfahren, um die Lösung lediglich zu approximieren und den Rechenaufwand geringer zu halten. Vertreter der iterativen Verfahren sind das Jacobi- und Gauß-Seidel-Verfahren, aber auch andere Splitting-Verfahren sind möglich. [2]

Des Weiteren werden lineare Mehrgitterverfahren eingesetzt, siehe [4]. Wobei viele Parameter zur Auswahl stehen, deren Einfluss beim Lösen komplexer partieller Differentialgleichungen, derzeit nicht mathematisch überschaubar ist. Eben jener Ansatz ist Grund für die Untersuchungen dieser Arbeit.

Die meisten Parameterkombinationen werden derzeit lediglich anhand von Erfahrungswerten gewählt. Durch Parametervariationen und ihre Untersuchungen ist es gegebenenfalls möglich bestimmte Parameterwahlen zu empfehlen und einen Leitfaden zur Parameterwahl an die Hand zu geben. Wünschenswert wäre es eine automatische Parameteroptimierung zu programmieren.

## 1.3 | Vorgehen

Der Einfluss einiger Parameter auf die Laufzeit des linearen Mehrgitterverfahrens wird untersucht. Zu den variablen Parametern gehören beispielsweise der Mehrgitterzyklus, der Glätter und verschiedene Abbruchkriterien der Lösungsalgorithmen beim approximativen linearen Lösen. Weitere Parameter, die hauptsächlich den nichtlinearen Teil des Lösungsalgorithmus betreffen, bleiben konstant, um Wechselwirkungen mit dem linearen Mehrgitterverfahren zu minimieren. Mechanismen des nichtlinearen approximativen Lösens werden aus selbigem Grund auf ein Nötiges vereinfacht, sodass nahe an einem Newton-Verfahren agiert wird. [4]

Das Hauptaugenmerk liegt auf der Variation und dem Erreichen der Abbruchkriterien, die das lineare Mehrgitterverfahren bietet. Vorläufig lässt sich festhalten, dass für die Untersuchungen der Lösungsalgorithmus so simpel wie möglich betrieben wird und der Einfluss verschiedener Parameter, insbesondere der Abbruchkriterien des linearen Mehrgitterverfahrens, ermittelt werden soll. Diverse andere Parameter und Einflussgrößen werden dabei weitestgehend konstant gehalten.

Basis der Lösungsalgorithmen stellt RK dar, ein interner Forschungscode des DLR (Deutsches Zentrum für Luft- und Raumfahrt), siehe [4]. Die Variation der Parameter wird mittels eines Python-Codes automatisiert und auf einer Linux-Maschine sowie dem "Case-Cluster des DLRs" durchgeführt. Dabei werden die Iterationsschritte, die Rechenzeit sowie die Ergebnisse aufgezeichnet.

# 2 Theoretische Grundlagen

Nach der Einleitung gilt es die theoretischen Grundlagen dieser Arbeit zu beleuchten. Begonnen wird dabei mit den mathematischen Modellen, die zur Approximation realer Strömungsphänomene dienen.

## 2.1 | Navier-Stokes-Gleichungen

Die Bilanzierung des Flusses von Erhaltungsgrößen über die Oberfläche eines feststehenden Kontrollvolumens führt im Dreidimensionalen zu fünf Erhaltungsgleichungen. Die drei Erhaltungsgrößen sind die Masse, der Impuls sowie die Energie. Für eine instationäre, dreidimensionale und kompressible Strömung ergibt sich in Differentialform nach Oertel [5] für die fünf Erhaltungsgleichungen zunächst die Kontinuitätsgleichung mit

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0.$$

Die Impulsgleichungen in die drei Koordinatenrichtungen ergeben sich nach der Bilanzierung:

Zeitliche Änderung innerer und kinetischer Energie im Volumenelement =  
 $\sum$  durch Strömung ein-/ausfließende Energieströme +  
 $\sum$  durch Wärmeleitung ein-/ausfließende Energieströme +  
 $\sum$  durch Druckkräfte, Normal- und Schubspannungskräfte  
am Volumenelement verrichtete Leistung +  
äußere Energiezufuhr +  
durch Volumenkräfte verrichtete Leistung ,

in Differentialform als

$$\rho \left( \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + w \frac{\partial u}{\partial z} \right) = k_x - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{eff} \left( 2 \frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] +$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right],$$

$$\rho \left( \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + w \frac{\partial v}{\partial z} \right) = k_y - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) \right] +$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_{eff} \left( 2 \frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right],$$

$$\rho \left( \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} + v \frac{\partial w}{\partial y} + w \frac{\partial w}{\partial z} \right) = k_z - \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial}{\partial x} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \right] +$$
$$\frac{\partial}{\partial y} \left[ \mu_{eff} \left( \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \right] + \frac{\partial}{\partial z} \left[ \mu_{eff} \left( 2 \frac{\partial w}{\partial z} - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right) \right].$$

Anschließend schreibt sich die Energiegleichung als

$$\begin{aligned} \rho \left( \frac{\partial e}{\partial t} + u \frac{\partial e}{\partial x} + v \frac{\partial e}{\partial y} + w \frac{\partial e}{\partial z} \right) = & \left[ \frac{\partial}{\partial x} \left( \lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left( \lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left( \lambda_{eff} \frac{\partial T}{\partial z} \right) \right] - \\ & p \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) + \rho \dot{q}_s + 2\mu \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left( \frac{\partial v}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2 \right] + \\ & \left( \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + \left( \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right)^2 + \left( \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right)^2 - \frac{2}{3} \left( \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right)^2. \end{aligned}$$

In ihr enthalten sind die Dichte  $\rho$ , die Zeit  $t$ , die Geschwindigkeiten  $u, v$  und  $w$  in die Koordinatenrichtungen  $x, y$  und  $z$ . Hinzu kommen die Volumenkräften  $k_i$  mit  $i \in \{x, y, z\}$ , der Druck  $p$  und die effektive dynamische Viskosität  $\mu_{eff}$ . Des Weiteren enthalten sind die spezifische, innere Energie  $e$ , die Temperatur  $T$  und der, dem Fluid von außen zugeführte, spezifische Energiestrom  $\dot{q}_s$ . Gemeinsam ergeben diese Erhaltungsgleichungen einen zeitabhängigen Satz von nichtlinearen partiellen Differential- oder Integralgleichungen, – Navier-Stokes-Gleichungen genannt.

Die Volumenkräfte sind, bei niedriger Dichte des strömenden Fluids, in der Regel zu vernachlässigen. Die fünf Gleichungen enthalten somit bei genauerer Betrachtung sieben unbekannte Variablen. Diese Variablen sind namentlich: Die Dichte  $\rho$ , die Geschwindigkeiten  $u, v$  und  $w$ , die spezifische innere Energie  $e$  sowie den vorherrschenden Druck  $p$  und die vorherrschende Temperatur  $T$ . Es werden daher zwei weitere Gleichungen zum Schließen des Gleichungssystems benötigt. Diese können zum Beispiel thermodynamische Zusammenhänge zwischen den Zustandsgrößen des Fluids sein. Diese zusätzlichen Gleichungen beeinflussen mit den Annahmen, die sie verkörpern, die physikalischen Eigenschaften des Fluids im mathematischen Modell, siehe [6].

Turbulenz umfasst auch sehr kleinskalige Strukturen, die im Allgemeinen auf groben Gittern nicht aufgelöst werden können. Mit den Navier-Stokes-Gleichungen ist es in der Regel nicht möglich die turbulenten Eigenschaften einer Strömung wiederzugeben. Die Auflösung eines Rechengitters, mit einem vertretbaren Rechenaufwand, ist meist zu grob. Wenn die Rechengitterauflösung nicht fein genug ist, um die physikalischen Phänomene der turbulenten Strömung aufzulösen, dann können diese nicht auftreten und es kann lediglich eine laminare Strömung beschrieben werden. Wenn die Auflösung des Rechengitters hingegen sehr hoch ist, gehen die Eigenschaften der Berechnung in eine DNS (Direct Numerical Simulation) über und auch die Eigenschaften einer turbulenten Strömung werden mittels der Navier-Stokes-Gleichungen beschrieben [4]. Die hohe Auflösung einer DNS benötigt hohe Rechenleistung und ist überwiegend nur für Testfälle umsetzbar.

## 2.2 | Reynolds-gemittelte Navier-Stokes-Gleichungen

Die genaue Beschreibung der Turbulenz ist häufig zu aufwendig, sodass die Stochastik zu Hilfe genommen wird. Ziel ist es lediglich das relevante Mittel der turbulenten Strömung wiederzugeben und so den Rechenaufwand geringer zu halten. Für die Beschreibung einer turbulenten Strömung mittels Stochastik ist einer der ersten Schritte die Dekomposition der Strömungsgrößen. Die Strömungsgrößen werden zerlegt in die Summe aus ihrem Mittelwert und ihrer Schwankungsgröße, auch Fluktuation genannt. Für die Geschwindigkeitskomponente  $u$  in  $x$ -



Richtung und den Druck  $p$  ergibt sich somit beispielhaft

$$u(\vec{x}, t) = \underbrace{\overline{u(\vec{x})}}_{\text{zeitlicher Mittelwert}} + \underbrace{u'(\vec{x}, t)}_{\text{Fluktuation}}, \quad p(\vec{x}, t) = \overline{p(\vec{x})} + p'(\vec{x}, t),$$

wobei für später angemerkt sei, dass die Mittelung einer Fluktuation Null ist

$$\{\overline{u'(\vec{x}, t)}, \overline{p'(\vec{x}, t)}\} = \{0, 0\}.$$

Die Mittelung der Korrelation zweier Fluktuationen ist hingegen nicht Null

$$\overline{u'v'} \neq 0.$$

Wird für die Navier-Stokes-Gleichungen eine Mittelung der Variablen durchgeführt, beschreibt die Lösung des Gleichungssystems auch nur noch einen gemittelten Zustand. Das Gleichungssystem, dass sich nach der Dekomposition und anschließenden Mittelung der Variablen ergibt, wird RANS-Gleichungen (Reynolds averaged Navier Stokes equations) genannt. Es gibt drei Arten diese Reynolds-Mittelung durchzuführen [6]. Die zeitliche Mittelung

$$\overline{u(\vec{x})} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_t^{t+T} u(\vec{x}, t) dt,$$

die örtliche Mittelung

$$\overline{u(t)} = \lim_{\Omega \rightarrow \infty} \frac{1}{\Omega} \int_{\Omega} u(\vec{x}, t) d\Omega$$

und die Ensemble-Mittelung

$$\overline{u(\vec{x}, t)} = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{m=1}^N u_m(\vec{x}, t).$$

Ist die turbulente Strömung nicht nur transient, sondern auch homogen, liegt Ergodizität vor. Die drei Mittelungsverfahren ergeben dann den gleichen Mittelwert.

Wenn die Dichte nicht konstant ist, dann ist eine Favre-Dekomposition zu empfehlen [7]. Dabei handelt es sich um eine dichte- oder auch massengewichtete Mittelung, mit der die gemittelten Gleichungen nicht durch zusätzliche Korrelationen verkompliziert werden [6].

Durch eine Mittelung der Navier-Stokes-Gleichungen mit dekomponierten Strömungsgrößen entsteht ein zusätzlicher Term:

$$\tau_t = -\rho \overline{u'_i u'_j} \quad \text{mit} \quad i, j = x, y, z.$$

Dieser zusätzliche Term wird durch die Fluktuationen hervorgerufen und kann im Sinne eines Spannungstensors interpretiert werden. Um möglichst übersichtliche Darstellungsweisen zu erzielen wird für die Geschwindigkeiten in die drei Raumrichtungen  $x, y$  und  $z$ , in dieser Arbeit wahlweise  $u, v$  und  $w$  als auch  $u_x, u_y$  und  $u_z$  verwendet.

$\tau_t$  wird **Reynolds-Spannungs-Tensor** genannt und seine Einträge werden als Reynolds-Spannungen bezeichnet

$$\tau_t = - \begin{bmatrix} \overline{\rho u' u'} & \overline{\rho u' v'} & \overline{\rho u' w'} \\ \overline{\rho v' u'} & \overline{\rho v' v'} & \overline{\rho v' w'} \\ \overline{\rho w' u'} & \overline{\rho w' v'} & \overline{\rho w' w'} \end{bmatrix}.$$

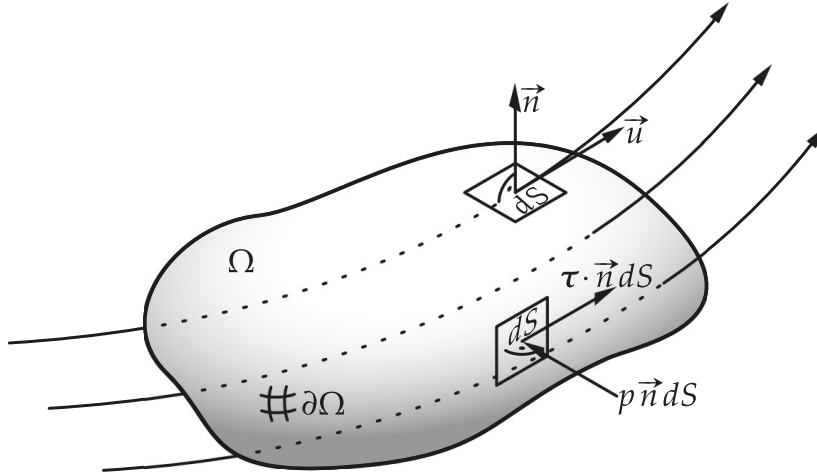


Abbildung 2.1: Dargestellt ist das Kontrollvolumen  $\Omega$  mit der Oberfläche  $\partial\Omega$  und den Oberflächenelementen  $dS$ . Beispielfhaft greifen eine Druckkraft  $p\vec{n}dS$  normal sowie eine Schubkraft  $\tau \cdot \vec{n}dS$  tangential an. Des Weiteren sind stellvertretend drei Stromlinien, die von links nach oben rechts zeigen, eingezeichnet und der daraus resultierende Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u}$  auf einem Oberflächenelement.

Im Dreidimensionalen sind dies neun zusätzliche, unbekannte Größen und das Gleichungssystem ist somit mathematisch gesehen komplexer. Wird Isotropie der Turbulenz angenommen, verbleibt ein symmetrischer  $3 \times 3$ -Tensor mit immer noch sechs Unbekannten.

Mittels der **Boussinesq-Approximation**, also der Annahme einer Ähnlichkeit der Reynolds-Spannungen zu den molekularen Schubspannungen, sollen diese sechs unbekannten Größen zu einer Einzigen kondensiert werden. Es wird angenommen, dass die Reynolds-Spannungen zu den Gradienten der mittleren Geschwindigkeit sowie einer turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_t$  proportional sind. Die verbleibende unbekannte Größe ist nun die turbulente Wirbelviskosität. Durch diese vereinfachende Annahme, der Einführung der turbulenten Wirbelviskosität, sind die RANS-Gleichungen nun mathematisch äquivalent zu den Navier-Stokes-Gleichungen und nicht länger komplexer. Im folgenden sind die RANS-Gleichungen beispielhaft in Integralform aufgeführt

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\vec{W}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} (\vec{f}_c \cdot \vec{n} - \vec{f}_v \cdot \vec{n}) dS = 0. \quad (2.1)$$

Mit dem Kontrollvolumen  $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ , der Oberfläche  $\partial\Omega$  des Kontrollvolumens, dem Oberflächenelement  $dS$  sowie dem Ortsvektor  $\vec{x} = (x, y, z)$ . Das Kontrollvolumen ist in Abbildung 2.1 dargestellt. Der Vektor der konservativen Variablen ist definiert durch

$$\vec{W} := (\rho, \rho u, \rho v, \rho w, \rho E)^T,$$

mit der spezifischen, totalen Energie  $E$ . Der Vektor  $\vec{f}_c$  wird als konvektiver Flussdichtetensor betitelt, da er die konvektiven Anteile der Strömung beinhaltet, und der Vektor  $\vec{f}_v$ , der die viskosen Anteile enthält, wird analog als viskoser Flussdichtetensor bezeichnet. Zusammen

mit dem äußeren Einheitsnormalenvektor  $\vec{n} = (n_x, n_y, n_z)$  ergibt sich

$$\vec{f}_c \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} \rho V \\ \rho u V + p n_x \\ \rho v V + p n_y \\ \rho w V + p n_z \\ \rho H V \end{pmatrix}, \quad \vec{f}_v \cdot \vec{n} = \begin{pmatrix} 0 \\ n_x \tau_{xx} + n_y \tau_{xy} + n_z \tau_{xz} \\ n_x \tau_{yx} + n_y \tau_{yy} + n_z \tau_{yz} \\ n_x \tau_{zx} + n_y \tau_{zy} + n_z \tau_{zz} \\ n_x \theta_x + n_y \theta_y + n_z \theta_z \end{pmatrix}.$$

Das Skalarprodukt aus Geschwindigkeitsvektor  $\vec{u} = (u, v, w) = (u_x, u_y, u_z)$  und dem äußeren Einheitsnormalenvektor ergibt die Gesamtgeschwindigkeit

$$V = \langle \vec{u}, \vec{n} \rangle.$$

Zudem setzt sich die spezifische totale Enthalpie

$$H(\vec{x}, t) = E(\vec{x}, t) + \frac{p(\vec{x}, t)}{\rho(\vec{x}, t)}$$

zusammen aus der Summe aus spezifischer totaler Energie  $E(\vec{x}, t)$  und dem Verhältnis aus Druck und Dichte, wobei der Druck aus der Zustandsgleichung

$$p(\vec{x}, t) = (\kappa - 1)\rho(\vec{x}, t) \left( E(\vec{x}, t) - \frac{\|\vec{u}\|_2^2}{2} \right)$$

bestimmt werden kann, in der der Isentropenexponent  $\kappa$  des Fluids (1,4 für Luft) enthalten ist. Die Normalspannungen, die an dem Kontrollvolumen angreifen und innerhalb des viskosen Flussschichtensensors auftreten, schreiben sich

$$\tau_{ii} := \mu_{eff} \left( 2 \frac{\partial u_i}{\partial i} - \frac{2}{3} \nabla \cdot \vec{u} \right) \quad \text{mit } i = x, y, z.$$

Die Scherspannungen werden hingegen wie folgt bestimmt

$$\tau_{ij} := \mu_{eff} \left( \frac{\partial u_i}{\partial j} + \frac{\partial u_j}{\partial i} \right) \quad \text{mit } i = x, y, z, \quad j = x, y, z, \quad i \neq j, \quad \text{sodass } \tau_{ij} = \tau_{ji}.$$

Für die Kombination aus Reibungsleistung und Wärmestromdichte gilt

$$\theta_i := \langle \vec{u}, (\tau_{ix}, \tau_{iy}, \tau_{iz}) \rangle - q_i \quad \text{mit } i = x, y, z.$$

Wobei für den Wärmestromdichtevektor der Zusammenhang

$$\vec{q} := -\lambda_{eff} \nabla T, \quad \vec{q} = (q_x, q_y, q_z)$$

besteht. Darin enthalten ist die effektive Wärmeleitfähigkeit  $\lambda_{eff}$ , die mittels

$$\lambda_{eff} := \lambda_{lam} + \lambda_t \quad \text{mit} \quad \lambda_{lam/t} := \frac{c_p \mu_{lam/t}}{Pr_{lam/t}}, \quad Pr_{lam} = 0,72, \quad Pr_t = 0,92,$$

mit der laminaren Prandtl-Zahl  $Pr_{lam}$  und der turbulenten Prandtl-Zahl  $Pr_t$  bestimmt werden kann. Hier wiederum benötigt wird die spezifische Wärmekapazität

$$c_p := R \frac{\kappa}{\kappa - 1},$$

die von der universellen Gaskonstante  $R$  und dem Isentropenexponenten  $\kappa$  abhängt. Die effektive dynamische Viskosität  $\mu_{eff}$  setzt sich, allgemein geschrieben, aus der laminaren dynamischen Viskosität  $\mu_{lam}$  und der turbulenten Wirbelviskosität  $\mu_t$  zusammen und lautet folglich

$$\mu_{eff} := \mu_{lam} + \mu_t.$$

Die laminare dynamische Viskosität lässt sich mit dem Sutherland-Gesetz

$$\mu_{lam} := \mu_{lam,\infty} \frac{T_\infty + \bar{T}}{T + \bar{T}} \left( \frac{T}{T_\infty} \right)^{3/2}$$

bestimmen. In dem die Sutherland-Konstante  $\bar{T} := 110,4 \text{ K}$  und die Referenzviskosität  $\mu_{lam,\infty}$  an der Stelle der Referenztemperatur  $T_\infty$  enthalten sind. [8]

Zur turbulenten Wirbelviskosität sind weitere Ausführungen in dem kommenden Kapitel 2.4 zu finden.

### Reynoldszahl

Bevor die Euler-Gleichungen kurz vorgestellt werden, soll die Reynoldszahl

$$Re_\infty = \frac{V_\infty \cdot L \cdot \rho_\infty}{\mu_\infty},$$

eingeführt werden. In diesem Fall wird sie mit der Anströmgeschwindigkeit  $V_\infty$ , der charakteristischen Länge  $L$ , der dynamischen Referenzviskosität  $\mu_\infty$  sowie der Referenzdichte  $\rho_\infty$  gebildet. Als charakteristische Länge kann beispielsweise für 2D Profilmströmungen die Profilhöhe gewählt werden. Die Reynoldszahl kann als ein Maß für das Verhältnis von Trägheitskräften zu viskosen Kräften gesehen werden, anders formuliert das Verhältnis von destabilisierenden Kräften zu stabilisierenden Kräften.

## 2.3 | Euler-Gleichungen

Wird die Viskosität bei den laminaren Navier-Stokes-Gleichungen vernachlässigt, ergeben sich die Euler-Gleichungen. Bei manch einer Strömung mit einer hohen Reynoldszahl kann die Vernachlässigung der Viskosität in Betracht gezogen werden. Die Trägheitskräfte ( $\propto (v \cdot L)$ ) übertreffen dann die viskosen Kräfte ( $\propto \nu$ ) bei Weitem und die Grenzschicht ist sehr dünn gegenüber den Abmessungen des umströmten Körpers. Die Euler-Gleichungen beschreiben nur die konvektive Bewegung von Strömungsgrößen innerhalb eines reibungsfreien Fluids [6]. Sie sind lediglich der Vollständigkeit halber genannt, werden im Späteren aber nicht weiter betrachtet.

Werden die drei oben aufgeführten Gleichungssysteme nochmals betrachtet, dann ist beginnend bei den Euler-Gleichungen anzumerken, dass bei ihnen die Viskosität vernachlässigt wird. Bei den Euler-Gleichungen ergibt sich

$$\mu = \mu_{lam} = \mu_t = 0.$$

In den Navier-Stokes-Gleichungen ist die Viskosität hingegen vorhanden und es gilt

$$\mu = \mu_{lam} \quad \text{mit} \quad \mu_t = 0.$$

Die dynamische Viskosität  $\mu$  wird in diesem Fall auch laminare Viskosität  $\mu_{lam}$  genannt. Werden zuletzt die RANS-Gleichungen betrachtet, dann ist zu erwähnen, dass die dynamische Viskosität  $\mu$  aufgespalten wird. Es gilt

$$\mu = \mu_{lam} + \mu_t = \mu_{eff},$$

sodass sich die dynamische Viskosität zusammensetzt aus der Summe von laminarer Viskosität  $\mu_{lam}$  und turbulenter Wirbelviskosität  $\mu_t$ . [4]

## 2.4 | Turbulenzmodell: Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras

Die Haupteigenschaften einer turbulenten Strömung sind Instationarität, Dreidimensionalität, Diffusion, Dissipation und keine Skalierbarkeit [9]. Die Instationarität der turbulenten Strömung geht bei der Einführung einer Mittelung und der Annahme, dass sich eine turbulente Strömung im Mittel stationär verhält, verloren. Somit werden die RANS-Gleichungen verwendet, um eine stationäre Lösung einer gegebenenfalls turbulenten Strömung zu approximieren. Der wesentliche Unterschied der RANS-Gleichungen zu den Navier-Stokes-Gleichungen ist die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  als zusätzliche unbekannte Größe. Die laminare Viskosität in den Navier-Stokes-Gleichungen wird in den RANS-Gleichungen durch die Summe aus laminarer Viskosität und turbulenter Wirbelviskosität ersetzt. Mittels dieser zusätzlichen, künstlichen Gewichtung der diffusiven Terme wird die stationäre Lösung erzwungen. Die Turbulenzmodellierung hat zur Aufgabe die Größe der turbulenten Wirbelviskosität so bereit zu stellen, dass die turbulente Charakteristik der Strömung im Mittel korrekt wiedergegeben wird.

Die Herleitung der meisten Turbulenzmodelle basiert auf der inversen Bestimmung der Turbulenzintensität. Das Turbulenzmodell wird aufgestellt, dann mittels Einspeisen von validen Messdaten kalibriert und anschließend auf die turbulente Wirbelviskosität zurückgerechnet. Schon kleine Störungen, zum Beispiel in der Druckausbreitung, können die Lösung des Randwertproblems gravierend verändern. Dies kann zu einer anderen turbulenten Wirbelviskosität führen und folglich ergibt eine inverse Bestimmung keine eindeutige Lösung. Im Allgemeinen sind ohnehin keine validen Messdaten eines spezifischen Problems vorhanden, um eine inverse Berechnung durchzuführen. Somit muss die turbulente Wirbelviskosität durch das Lösen zusätzlicher Integralgleichungen rekonstruiert werden. Dazu wird ein Turbulenzmodell zur Bestimmung der turbulenten Wirbelviskosität benötigt. [4]

Ein Turbulenzmodell zur Bestimmung von  $\mu_t$  stellt das **Eingleichungsmodell nach Spalart und Allmaras** (SA-Modell) dar [10]. Es gehört zu den EVM (Eddy Viscosity Models) und basiert somit auf der Boussinesq-Approximation. Der Begriff Eingleichungsmodell beschreibt, dass bei dem Turbulenzmodell nach Spalart und Allmaras nur eine, für die Turbulenz charakteristische, Größe in der Strömung transportiert wird. Mit dem Transport dieser Größe soll die turbulente Eigenschaft der Strömung quantitativ erfasst werden. [6]

Die turbulente Wirbelviskosität  $\mu_t$  ist proportional zu der Dichte  $\rho$  sowie der turbulenten kinematischen Viskosität  $\nu_t$ . Es folgt

$$\mu_t = \rho \cdot \nu_t \quad \text{mit} \quad \nu_t = \tilde{\nu} \cdot f_{v1}.$$

$\nu_t$  wird wiederum proportional zu der Wirbelviskositäts-Variable  $\tilde{\nu}$  angenommen, dabei stellt  $f_{v1}$  einen Formel-Platzhalter dar. Für das Bestimmen von  $\mu_t$  wird nun eine Transportgleichung

für die Wirbelviskositäts-Variable  $\tilde{v}$  gelöst

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\tilde{v}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} (\vec{f}_{c,turb} \cdot \vec{n} - \vec{f}_{v,turb} \cdot \vec{n}) dS = \int_{\Omega} (Q) d\vec{x}, \quad (2.2)$$

für weitere Informationen siehe [4, 6, 10].

## 2.5 | Randwertproblem und Randbedingungen

Um ein spezifisches Strömungsszenario beschreiben zu können, reichen die bislang genannten Gleichungen nicht aus. Es muss mit ihnen ein zugehöriges Randwertproblem formuliert werden. Wie zu Beginn angemerkt, können die meisten solcher Randwertprobleme, die anhand von Gleichungen aus der Familie der Navier-Stokes-Gleichungen formuliert werden, nicht geschlossen gelöst werden. Es ist daher das Ziel und die Aufgabe diese Randwertprobleme durch Anwendung numerischer Methoden approximativ zu lösen. In diesem Fall wird mit einer gegebenen Anfangsbedingung eine Lösung zum stationären Zustand gefunden, die das Randwertproblem erfüllt [4]. Damit werden im Idealfall die realen Strömungsphänomene, im Rahmen der getroffenen Annahmen, approximiert.

Wenngleich sich ein Objekt in der Realität meist durch ein Fluid hindurch bewegt, kann die Betrachtung auch umgekehrt werden. Dann wird angenommen, dass der Schwerpunkt des Objektes im Raum fix ist. Das Fluid bewegt sich dann um das Objekt herum und physikalisch ergeben sich im Allgemeinen die gleichen Phänomene. Ähnlich wie Versuche im Windkanal, für die Untersuchung realer Situationen, in denen beispielsweise ein Flugzeug durch die Luft gleitet, durchgeführt werden.

Im Folgenden werden Randbedingungen formuliert, die bei klassischen Strömungsphänomenen erfüllt werden müssen. Für die Formulierung wird die Sichtweise eines feststehenden umströmten Objektes verwendet. Weit entfernt von dem umströmten Objekt stellt sich ein homogenes Fernfeld ein. Die Strömungsgrößen lauten dort

$$\begin{aligned} \vec{W}_{\infty} &:= (\rho_{\infty}, \rho_{\infty} \vec{u}_{\infty}, \rho_{\infty} E_{\infty})^T, \\ W_{t,\infty} &:= \tilde{v}_{\infty}. \end{aligned}$$

Die Strömungsgrößen dieses äußeren Randwertes sind mit dem Index  $\infty$  versehen und werden häufig zur Normierung und Entdimensionalisierung verwendet.

Eine stationäre Lösung ist von Interesse, daher werden auch die Randwertprobleme stationär formuliert. Das feststehende umströmte Objekt wird nach [4] mit  $D \subset \mathbb{R}^m$  und  $m = 3$  für einen dreidimensionalen Raum betitelt. Des Weiteren wird angenommen, dass die Objektoberfläche  $\partial D \subset \mathbb{R}^{m-1}$  geschlossen ist.

Für ein **reibungsloses Umströmungsproblem** wird nach [4] eine Funktion  $\vec{W}^+$  gesucht, die die Euler-Geichungen in  $\mathbb{R}^m \setminus \{D, \partial D\}$  erfüllt. Ferner muss gelten

$$\frac{d}{dt} \vec{W}^+(\vec{x}, t) = 0, \quad \forall \vec{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{D, \partial D\}, \quad t \geq T^+ > 0, \quad (2.3)$$

und zudem müssen die Randwerte

$$\langle \vec{u}, \vec{n} \rangle \Big|_{\partial D} = 0$$

erfüllt werden. Weit entfernt von dem Objekt muss die gesuchte Funktion in das Fernfeld übergehen

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} \vec{W}^+(\vec{x}, t) = \vec{W}_\infty. \quad (2.4)$$

Das hier beschriebene, reibungsfreie Umströmungsproblem ist mathematisch vollkommen spezifiziert, sobald eine Machzahl

$$Ma_\infty = \frac{V_\infty}{a_\infty}$$

gegeben ist. Die Machzahl stellt das Verhältnis aus Strömungsgeschwindigkeit zu Schallgeschwindigkeit dar und ist ein Maß für die Kompressibilität eines Fluids.

Für ein **laminares, reibungsbehaftetes Umströmungsproblem** wird nach [4] eine Funktion  $\vec{W}^+$  gesucht, die die Navier-Stokes-Gleichungen in  $\mathbb{R}^m \setminus \{D, \partial D\}$  erfüllt. Somit muss abermals Gleichung (2.3) gelten und zudem müssen die adiabaten Randbedingungen

$$\vec{u} \Big|_{\partial D} = 0 \quad \text{und} \quad \frac{\partial T}{\partial \vec{n}} \Big|_{\partial D} = 0 \quad (2.5)$$

erfüllt werden. Weiterhin muss die gesuchte Funktion weit entfernt vom Objekt in das Fernfeld übergehen, vergleiche Gleichung (2.4). Das hier beschriebene, laminare, reibungsbehaftete Umströmungsproblem ist mathematisch vollkommen spezifiziert, sobald eine Machzahl  $Ma_\infty$ , das Verhältnis aus charakteristischer Länge zu Reynoldszahl  $L/Re$  sowie die Referenztemperatur  $T_\infty$  des Sutherland-Gesetzes gegeben sind.

Betrachten wir zuletzt noch ein **turbulentes, reibungsbehaftetes Umströmungsproblem**, dann wird nach [4] eine Funktion  $\vec{W}^+$  gesucht, die die RANS-Gleichungen in  $\mathbb{R}^m \setminus \{D, \partial D\}$  erfüllt. Somit muss wie gehabt Gleichung (2.3) gelten, die adiabaten Randbedingungen (2.5) müssen auf  $\partial D$  erfüllt werden und die gesuchte Funktion muss weit entfernt vom Objekt in das Fernfeld übergehen, siehe Gleichung (2.4). Hinzu kommt, dass wir eine weitere Funktion  $W_t$  suchen, die die Transportgleichung des SA-Modells in  $\mathbb{R}^m \setminus \{D, \partial D\}$  erfüllt und zudem die Randbedingung

$$\tilde{v} \Big|_{\partial D} = 0$$

einhält. Die gesuchte Funktion  $W_t$  muss des Weiteren weit entfernt vom Objekt in die Größen des Fernfeldes übergehen, sodass

$$\lim_{|\vec{x}| \rightarrow \infty} W_t := W_{t,\infty}$$

gilt. Das hier beschriebene, turbulente, reibungsbehaftete Umströmungsproblem ist ebenso wie das laminare mathematisch vollkommen spezifiziert, sobald eine Machzahl  $Ma_\infty$ , das Verhältnis aus charakteristischer Länge zu Reynoldszahl  $L/Re$  sowie die Referenztemperatur  $T_\infty$  des Sutherland-Gesetzes gegeben sind.

Eine grafische Darstellung der zuvor beschriebenen drei Umströmungsprobleme ist in Abbildung 2.2 gegeben. Direkt an der Oberfläche  $\partial D$  des Objektes  $D$  sind die Randbedingungen der jeweiligen Strömung verzeichnet. Entfernt vom Objekt sind die Fernfeld-Randbedingungen geschrieben. Im Raum dazwischen muss der jeweilige Satz der Strömungsdifferentialgleichungen erfüllt werden, wie zuvor vorgestellt.



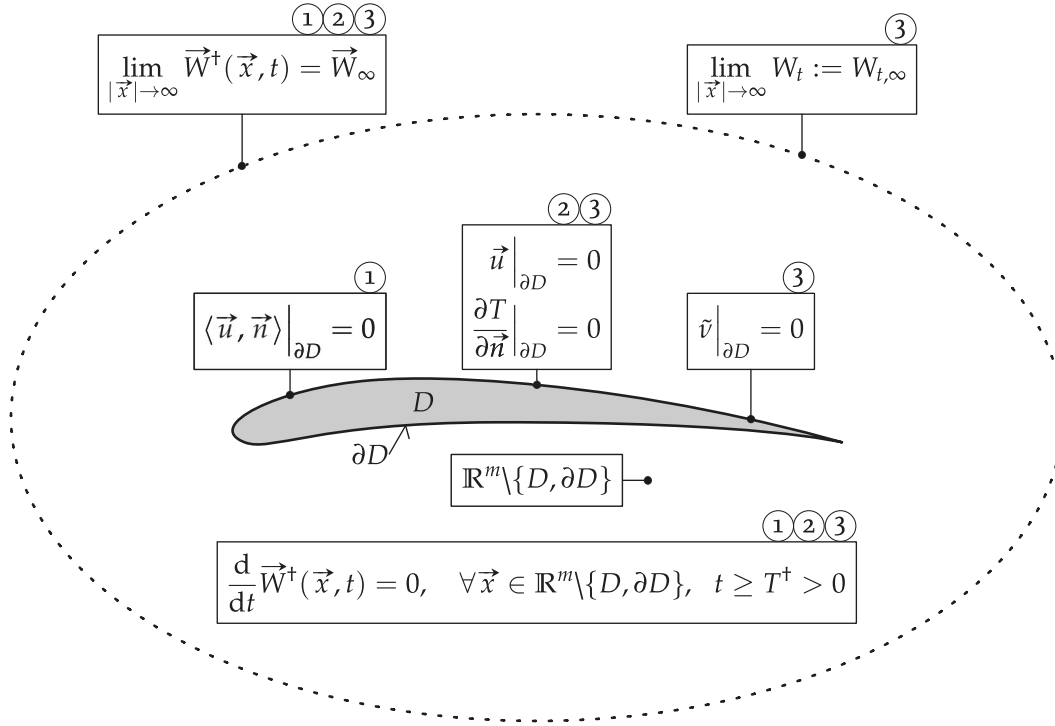


Abbildung 2.2: Dargestellt sind die Randbedingungen verschiedener Randwertprobleme, die bei der Umströmung eines Objektes vorkommen können. Die Gleichungen, die das reibungsfreie Umströmungsproblem betreffen, sind mit ① versehen. Für das laminare, reibungsbehaftete und das turbulente, reibungsbehaftete Umströmungsproblem sind die zugehörigen Gleichungen mit ② und ③ beschriftet.

## 2.6 | Diskretisierung und Finite-Volumen-Verfahren

Bevor ein numerisches Verfahren zum approximativen Lösen des Gleichungssystems angewendet werden kann, muss es zunächst diskretisiert werden. Das bedeutet, dass die kontinuierlichen Gleichungen in diskrete Gleichungen überführt werden. Dafür wird als Ortsdiskretisierung ein Knoten-zentriertes Finite-Volumen-Verfahren auf unstrukturierten Gittern verwendet.

Das Rechengitter, genannt Dualgitter, wird durch Vorverarbeitung aus dem Primärgitter konstruiert, siehe Abbildung 2.3. Die Kontrollvolumen werden durch das Dualgitter aufgespannt. Die unbekannten Strömungsgrößen befinden sich auf den Eckpunkten des Primärgitters. Das Zusammenspiel aus Dualgitter und Primärgitter ist für die Diskretisierung nebensächlich. Es zeigt jedoch, dass sich das Rechengitter vom Gitter des Gitter erzeugenden Programms unterscheiden kann. Die Gittergeometrie kann die Lösung beeinflussen, insbesondere bei groben Gittern oder in Grenzschichtbereichen. [4]

Die Stelle der unbekannten Größen  $(\vec{W}_1, \tilde{v}_1), \dots, (\vec{W}_N, \tilde{v}_N)$  im Dualgitter, also ihre Position, wird mit  $G := \{1, \dots, N\}$  betitelt. Ein willkürlicher Punkt  $i \in G$  ist von seinen Nachbarpunkten umgeben, das sind die Punkte, die direkt an ihn angrenzen. Diese Nachbarpunkte werden durch  $\mathcal{N}(i)$  beschrieben. Werden Größen auf der gemeinsamen Zellseite zweier willkürlicher Punkte  $i \in G$  und  $j \in G$  ausgewertet, dann werden sie mit einem doppelten Index  $ij$  versehen. In Abbildung 2.4 sind zwei Nachbarzellen  $\Omega_i$  und  $\Omega_j$  dargestellt. Der Zellschnittflächen-Ein-



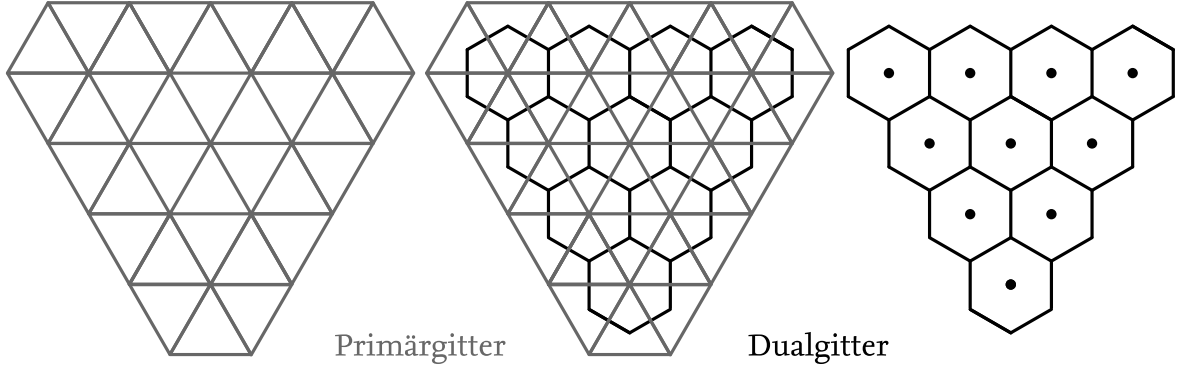


Abbildung 2.3: Die geometrische Entstehung (mittig) eines Dualgitters (rechts) aus einem Primärgitter (links).

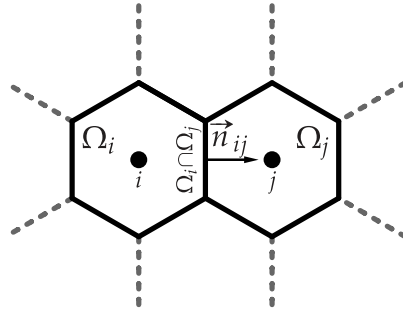


Abbildung 2.4: Der Zellschnittflächen-Einheitsnormalenvektor  $\vec{n}_{ij}$  steht auf der Schnittfläche  $\Omega_i \cap \Omega_j$  zweier Zellen  $\Omega_i$  und  $\Omega_j$  der Punkte  $i$  und  $j$ .

heitsnormalenvektor

$$\vec{n}_{ij} := \text{svol}(\Omega_{ij})(\vec{n}_{x,ij}, \vec{n}_{y,ij}, \vec{n}_{z,ij})$$

steht senkrecht auf der Schnittfläche  $\Omega_i \cap \Omega_j$  der beiden Zellen. Das enthaltene Zellschnittflächenintegral lautet

$$\text{svol}(\Omega_{ij}) := \int_{\Omega_i \cap \Omega_j} 1 \, dS.$$

Weiterhin werden die Normalgeschwindigkeit  $V_{ij}$  auf der Zellschnittfläche

$$V_{ij} := \frac{1}{2} \langle (\vec{u}_i + \vec{u}_j), \vec{n}_{ij} \rangle$$

und die Schallgeschwindigkeit auf der Zellschnittfläche

$$a_{ij} := \frac{1}{2}(a_i + a_j)$$

eingeführt. [8]

Im Folgenden sollen die RANS-Gleichungen und das SA-Modell, hier erneut aufgeführt

$$\text{RANS-Gleichungen: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\vec{W}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} (\underbrace{\vec{f}_c \cdot \vec{n}}_{(2.6)} - \underbrace{\vec{f}_v \cdot \vec{n}}_{(2.8)}) dS = 0, \quad (\text{siehe (2.1)})$$

$$\text{SA-Modell: } \frac{\partial}{\partial t} \int_{\Omega} (\tilde{v}) d\vec{x} + \int_{\partial\Omega} \underbrace{(\vec{f}_{c,turb} \cdot \vec{n})}_{(2.7)} - \underbrace{\vec{f}_{v,turb} \cdot \vec{n}}_{(2.9)} dS = \int_{\Omega} \underbrace{(\underline{Q})}_{(2.10)} d\vec{x}, \quad (\text{siehe (2.2)})$$

diskretisiert werden.

Die Diskretisierung des konvektiven Anteils  $\vec{f}_c \cdot \vec{n}$  der RANS-Gleichungen (2.1) wird mittels eines zentralen Differenzenschemas

$$\int_{\partial\Omega_i} (\vec{f}_c \cdot \vec{n}) dS \approx \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} \left( (\vec{f}_c \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{W}_i) + (\vec{f}_c \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{W}_j) \right) - \vec{D}_{ij}(\vec{W}) \quad (2.6)$$

durchgeführt. Stabilisiert wird das instabile zentrale Differenzenschema durch eine matrixgewichtete, künstliche Viskosität

$$\begin{aligned} \vec{D}_{ij}(\vec{W}) &:= \frac{1}{2} \left| \mathbf{A}_{ij}^{Roe} \right| \left( \Psi_{ij}(\vec{W}_j - \vec{W}_i) - \xi s_{ij}(\vec{W})(1 - \Psi_{ij})(\vec{L}_i(\vec{W})) \right) \quad \text{mit:} \\ \xi &= \frac{1}{64}, \quad \mathbf{A}_{ij}^{Roe} := \frac{\partial(\vec{f}_c \cdot \vec{n}_{ij})}{\partial \vec{W}} [\vec{W}_{Roe}], \quad \vec{L}_i(\vec{W}) := \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\vec{W}_j - \vec{W}_i). \end{aligned}$$

Eine detaillierte Beschreibung der künstlichen Viskosität ist in [11, 12] zu finden. Auf einige Bestandteile soll jedoch kurz eingegangen werden.

In der künstlichen Viskosität enthalten ist eine druckbasierte Sensorfunktion

$$\Psi_{ij}^* := \frac{(p_j - p_i)^2}{(p_j + p_i)^2} \in [0, 1],$$

um in der Nähe von Stößen die Methode von 2ter Ordnung auf 1ter Ordnung zu verringern. So können Oszillationen verhindert werden, die andernfalls bei einem zentralen Schema 2ter Ordnung mit künstlicher Dissipation an Diskontinuitäten entstehen würden. Druck ist ein geeigneter Indikator, da er sich an Stößen und Nichtlinearitäten gravierend ändert, aber sich kaum in der Grenzschicht der Strömung ändert, trotz starker Geschwindigkeitsgradienten. Damit nicht schon bei kleinsten Änderungen des Drucks ein Umschalten der Ordnung geschieht, wird eine Schranke  $\varepsilon_{\Psi} := 8$  verwendet, sodass die endgültige Sensorfunktion

$$\Psi_{ij} := \min\{\varepsilon_{\Psi} \Psi_{ij}^*, 1\}$$

lautet.

Ein weiterer Bestandteil der künstlichen Viskosität ist der Zelldehnungskoeffizient

$$\begin{aligned} s_{ij}(\vec{W}) &:= 1 + 2 \frac{\sqrt{z_i} \sqrt{z_j}}{\sqrt{z_i} + \sqrt{z_j}} \\ \text{mit } z_i &:= \frac{\lambda_i - \lambda_{ij}}{\lambda_{ij}}, \quad \lambda_i := \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \lambda_{ij}, \quad \lambda_{ij} := |V_{ij}| + \text{svol}(\Omega_{ij}) a_{ij}. \end{aligned}$$

Dessen Aufgabe ist die Dissipation, für stark verzerrte Zellen, in Richtung der Verzerrung zu erhöhen. So lässt sich die Zuverlässigkeit der Diskretisierung erhöhen [8].

Eine direkte Implementierung des oben beschriebenen Diskretisierungsoperators würde meist zu einem instabilem Diskretisierungsschema führen. Wird einer der Eigenwerte verschwindend gering ( $\approx 0$ ) und die stabilisierende, künstliche Viskosität würde dadurch auch verschwindend gering werden, wird ein Entropie-Fix verwendet. Durch den Entropie-Fix wird

verhindert, dass das System instabil wird, wenn eine der Ausbreitungsgeschwindigkeiten Werte nahe Null annimmt. Die Ausbreitungsgeschwindigkeit als Teil des Vorfaktors der künstlichen Viskosität würde diese auch zu Null werden lassen und dann wäre das System instabil. Für die Erstellung der Roe-Matrix sowie einem Entropie-Fix wird auf [13] verwiesen.

Als Diskretisierung des konvektiven Anteils  $\vec{f}_{c,turb} \cdot \vec{n}$  des SA-Modells (2.2) kommt ein Roe-Schema erster Ordnung

$$\int_{\partial\Omega_i} (\vec{f}_{c,turb} \cdot \vec{n}) dS \approx \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} \left( (\vec{f}_{c,turb} \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{W}_i) + (\vec{f}_{c,turb} \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{W}_j) \right) - \frac{1}{2} |V| (\tilde{v}_j - \tilde{v}_i) \quad (2.7)$$

zum Einsatz. Es besteht aus einem zentralen Differenzenschema und einem angefügten dissipativen Anteil. Der wesentliche Unterschied von Gleichung (2.7) zu der Diskretisierung des konvektiven Anteils der RANS-Gleichungen liegt in der Begrenzung auf Terme erster Ordnung und darin, dass die Flussfunktion ohne Entropie-Fix formuliert wird. Turbulente Strömungen sind meist sehr diffusiv, ein zusätzlicher Entropie-Fix könnte in zu viel Diffusion enden.

Die Diskretisierungen der viskosen Anteile  $\vec{f}_v \cdot \vec{n}$  und  $\vec{f}_{v,turb} \cdot \vec{n}$  sind durch

$$\int_{\partial\Omega_i} (\vec{f}_v \cdot \vec{n}) dS \approx \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\vec{f}_v \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{W}_i, \vec{W}_j, \nabla \vec{W}_i, \nabla \vec{W}_j), \quad \text{und} \quad (2.8)$$

$$\int_{\partial\Omega_i} (\vec{f}_{v,turb} \cdot \vec{n}) dS \approx \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} (\vec{f}_{v,turb} \cdot \vec{n}_{ij})(\vec{W}_i, \vec{W}_j, \nabla \vec{W}_i, \nabla \vec{W}_j) \quad (2.9)$$

gegeben. Die Derivative, die für die Diskretisierung der viskosen Anteile benötigt werden, werden entweder mit einem Green-Gauß-Verfahren oder der Annahme, dass lediglich die Gradienten normal zur Strömungsrichtung relevant sind (thin shear layer approximation), approximiert. Bei der thin shear layer approximation werden die Ableitungen direkt auf den Zellseitenflächen approximiert, so wie benötigt. Das Green-Gauß-Verfahren approximiert die Ableitungen hingegen im Schwerpunkt des Kontrollvolumens. Als Näherung für die Werte auf den Zellseitenflächen wird daher jeweils ein arithmetisches Mittel verwendet. Der Wert zwischen zwei Zellschwerpunkten ist näherungsweise auf der Zellseitenfläche. Beide Verfahren haben Einschränkungen und Fehler, siehe dazu [4].

Der Quellterm des SA-Modells wird in

$$\int_{\Omega_i} (Q) d\vec{x} \approx \text{vol}(\Omega_i) Q(\vec{W}_i, \nabla \vec{W}_i) \quad (2.10)$$

auch mittels eines Green-Gauß-Verfahrens diskretisiert.

Setzt man Gleichungen (2.6) und (2.8) in Gleichung (2.1) ein, sowie Gleichungen (2.7) und (2.9) in Gleichung (2.2) ein, so ergibt sich ein nichtlineares System gewöhnlicher Differentialgleichungen

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \vec{W}(t) \\ \tilde{v}(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\mathbf{M}_{mean}^{-1} \vec{R}_{mean}(\vec{W}(t), \tilde{v}(t)) \\ -\mathbf{M}_{turb}^{-1} \vec{R}_{turb}(\vec{W}(t), \tilde{v}(t)) \end{pmatrix}, \quad (2.11)$$

mit der Hauptströmungs-Massenmatrix  $\mathbf{M}_{mean} := \text{diag}(\text{diag}(\text{vol}(\Omega_i))) \in \mathbb{R}^{5N \times 5N}$  und der Turbulenz-Massenmatrix  $\mathbf{M}_{turb} := \text{diag}(\text{vol}(\Omega_i)) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Der Ausdruck  $\text{diag}(\dots)$  bedeutet,

dass nur noch die Diagonalelemente des Klammerinhalts ihren Wert behalten und die restlichen Einträge zu Null gesetzt werden. Beim Ausdruck  $\text{diag}(\text{diag}(\dots))$  wird der Ausdruck auf die Diagonalelemente des inneren Klammerinhalts reduziert.

Das Gleichungssystem (2.11) wird beim approximativen Lösen entkoppelt angenommen. Somit ist die Annahme, dass die Hauptströmungsgleichung nur von dem Vektor der konservativen Variablen  $\vec{W}$  abhängt und die Wirbelviskositäts-Variable  $\tilde{v}$  lediglich als Parameter fungiert. Folglich hängt hingegen die Turbulenzgleichung von  $\tilde{v}$  ab und  $\vec{W}$  tritt nur als Parameter auf. Daher lässt sich (2.11) entkoppelt umschreiben zu

$$\frac{d}{dt}\vec{W}(t) = -\mathbf{M}_{mean}^{-1} \vec{R}_{mean}(\vec{W}(t), \tilde{v}(t)), \quad (2.12a)$$

$$\frac{d}{dt}\tilde{v}(t) = -\mathbf{M}_{turb}^{-1} \vec{R}_{turb}(\vec{W}(t), \tilde{v}(t)). \quad (2.12b)$$

Die Gleichungen (2.12a) und (2.12b) werden dann sequenziell approximativ gelöst. [4, 8]

Es ist das Ziel eine stationäre Lösung zu approximieren. Folglich wird die zeitliche Änderung auf der linken Seite verschwindend gering und ferner gilt

$$\frac{d}{dt}\vec{W}(t) = 0, \quad \frac{d}{dt}\tilde{v}(t) = 0.$$

Aus dieser Annahme folgt für (2.12) die Vereinfachung zu

$$0 = \vec{R}_{mean}(\vec{W}(t), \tilde{v}(t)), \quad (2.13a)$$

$$0 = \vec{R}_{turb}(\vec{W}(t), \tilde{v}(t)), \quad (2.13b)$$

die einen nichtlinearen Satz von Gleichungen darstellt, der approximativ gelöst werden soll. Für weitere Ausführungen siehe [4].

## 2.7 | Approximatives Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems mittels Runge-Kutta-Verfahren

Einleuchtend wäre es direkt ein Newton-Verfahren anzuwenden, da es eine der naheliegendsten Techniken ist, um nichtlineare Gleichungen zu lösen. Beim Newton-Verfahren ist das Bilden der Ableitung nötig. Das kann mittels eines Gauß-Newton-Verfahrens, als verallgemeinerter Ansatz des Newton-Verfahrens, umgangen werden, siehe [14]. Eine direkte Implementierung genannter Methoden, zum Approximieren einer stationären Lösung des Randwertproblems der Navier-Stokes-Gleichungen, ist für gewöhnlich nicht erfolgreich. Eine weitere Präzisierung der Methode ist zielführender.

So kann zum Beispiel ein Mehrgitterverfahren als weitere Technik zum Lösen linearer und nichtlinearer Gleichungen einbezogen werden. Ursprünglich wurden Mehrgitterverfahren zum Lösen linearer Gleichungen entwickelt. Sie können jedoch auch auf das nichtlineare Gleichungssystem der RANS-Gleichungen angewendet werden. Der Ausgang des iterativen Lösungsalgorithmus ist in diesem Fall ein implizites, mehrstufiges Runge-Kutta-Verfahren, um die Zuverlässigkeit und Effizienz zu erhöhen.

Im Folgenden soll eine Lösungsmethode hergeleitet werden, um die diskretisierte Hauptströmungsgleichung (2.12a) sowie die diskretisierte Turbulenzgleichung (2.12b) approximativ zu lösen. Die Strategie ist eine Generalisierung des Newton-Verfahrens und zur Motivation wird

ein mehrstufiges, implizites Runge-Kutta-Verfahren verwendet. Dazu soll ein s-stufiges, diagonal implizites Runge-Kutta Verfahren verwendet werden, gegeben durch das Butcher-Tableau

$$\begin{array}{c|cccc}
 0 & \alpha_{11} & 0 & \dots & 0 \\
 \vdots & \alpha_{21} & \ddots & \ddots & \vdots \\
 \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\
 0 & 0 & \dots & \alpha_{s,s-1} & \alpha_{ss} \\
 \hline
 & 0 & \dots & 0 & \alpha_{s+1,s}
 \end{array} \quad (2.14)$$

mit den einzelnen Runge-Kutta-Schritten sowie der Iterationsvorschrift

$$\begin{aligned}
 k_1(\vec{W}) &= -\mathbf{M}^{-1} \vec{R} \left( \vec{W}^{T_n} + \alpha_{11} \Delta t k_1(\vec{W}) \right) \\
 k_2(\vec{W}) &= -\mathbf{M}^{-1} \vec{R} \left( \vec{W}^{T_n} + \alpha_{21} \Delta t k_1(\vec{W}) + \alpha_{22} \Delta t k_2(\vec{W}) \right) \\
 &\vdots \\
 k_s(\vec{W}) &= -\mathbf{M}^{-1} \vec{R} \left( \vec{W}^{T_n} + \alpha_{s,s-1} \Delta t k_{s-1}(\vec{W}) + \alpha_{ss} \Delta t k_s(\vec{W}) \right) \\
 \vec{W}^{T_{n+1}} &= \vec{W}^{T_n} + \alpha_{s+1,s} \Delta t k_s(\vec{W}).
 \end{aligned} \quad (2.15)$$

Zum Lösen der nichtlinearen Systeme  $k_1, \dots, k_s$  wird, um die Nullstelle der Funktion

$$g_j(k_j(\vec{W})) := k_j(\vec{W}) + \mathbf{M}^{-1} \vec{R} \left( \vec{W}^{T_n} + \alpha_{j,j-1} \Delta t k_{j-1}(\vec{W}) + \alpha_{jj} \Delta t k_j(\vec{W}) \right) \quad (2.16)$$

zu approximieren, ein Newton-Verfahren

$$x_{n+1} = x_n - f'(x_n)^{-1} f(x_n) \quad \text{mit} \quad x_0 = k_j^{(0)}(\vec{W}), \quad f(x_0) = g_j(k_j^{(0)}(\vec{W})) \quad (2.17)$$

verwendet, dass nach einem Schritt abgebrochen wird. Für das Newton-Verfahren wird die Ableitung der Funktion (2.16) benötigt

$$\frac{\partial g_j(k_j(\vec{W}))}{\partial k_j(\vec{W})} [k_j(\vec{W})] = \mathbf{I} + \alpha_{jj} \Delta t \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \left( \vec{W}^{T_n} + \alpha_{j,j-1} \Delta t k_{j-1}(\vec{W}) + \alpha_{jj} \Delta t k_j(\vec{W}) \right).$$

Wird für den Initialwert  $k_j^{(0)}(\vec{W}) = 0$  angenommen, ergibt sich für das Newton-Verfahren beim ersten Schritt

$$\begin{aligned}
 k_j(\vec{W}) &= \cancel{k_j^{(0)}(\vec{W})} - \left[ \frac{\partial g_j(k_j^{(0)}(\vec{W}))}{\partial k_j(\vec{W})} [k_j^{(0)}(\vec{W})] \right]^{-1} g_j(k_j^{(0)}(\vec{W})) \\
 &= -[\vec{P}_j(\vec{W})]^{-1} \left( g_j(k_j^{(0)}(\vec{W})) \right),
 \end{aligned}$$

mit

$$\vec{P}_j(\vec{W}) = \mathbf{I} + \alpha_{jj} \Delta t \mathbf{M}^{-1} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \left( \vec{W}^{T_n} + \alpha_{j,j-1} \Delta t k_{j-1}(\vec{W}) + \alpha_{jj} \Delta t \cancel{k_j^{(0)}(\vec{W})} \right).$$

Mit diesem inneren Newton-Verfahren, dass nach einem Schritt abgebrochen wird, kann Iterationsvorschrift (2.15) neu formuliert werden, sodass  $k_1(\vec{W})$  nicht mehr von sich selbst abhängig ist

$$\begin{aligned} k_1(\vec{W}) &= -[\vec{P}_1]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{T_n}) \\ k_2(\vec{W}) &= -[\vec{P}_2]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{T_n} + \alpha_{21} \Delta t k_1) \\ &\vdots \\ k_s(\vec{W}) &= -[\vec{P}_s]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{T_n} + \alpha_{s,s-1} \Delta t k_{s-1}) \end{aligned} \quad (2.18)$$

$$\vec{W}^{T_{n+1}} = \vec{W}^{T_n} + \alpha_{s+1,s} \Delta t k_s(\vec{W}). \quad (2.19)$$

Wir definieren:

$$\begin{aligned} \vec{W}^{(0)} &:= \vec{W}^{T_n} \\ \vec{W}^{(j)} &:= \vec{W}^{T_n} - \alpha_{j+1,j} \Delta t [\vec{P}_j]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{(j-1)}), \quad j \in (1, \dots, s). \end{aligned}$$

Nach [8] kann per Induktion gezeigt werden, dass das oben stehende Runge-Kutta-Schema umformuliert werden kann zu

$$\begin{aligned} \vec{W}^{(0)} &:= \vec{W}^{T_n} \\ \vec{W}^{(1)} &:= \vec{W}^{(0)} - \alpha_{21} \Delta t [\vec{P}_1]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{(0)}) \\ &\vdots \\ \vec{W}^{(s)} &:= \vec{W}^{(0)} - \alpha_{s+1,s} \Delta t [\vec{P}_s]^{-1} \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{(s-1)}) \\ \vec{W}^{T_{n+1}} &= \vec{W}^{(s)}. \end{aligned} \quad (2.20)$$

### 2.7.1 | Inneres Lineares Gleichungssystem

Durch den Algorithmus (2.20) wird ersichtlich, dass für jede Stufe des Runge-Kutta-Verfahrens die lineare Gleichung

$$\vec{P}_j \vec{h}_j = \alpha_{j+1,j} \Delta t \mathbf{M}^{-1} \vec{R}(\vec{W}^{(j-1)}) \quad (2.21)$$

gelöst werden muss. Gleichung (2.21) kann nach Multiplikation mit  $\mathbf{M}$  äquivalent zu

$$\left( (\Delta t)^{-1} \mathbf{M} + \alpha_{jj} \frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}} \right) \vec{h}_j = \alpha_{j+1,j} \vec{R}(\vec{W}^{(j-1)}) \quad (2.22)$$

umgeformt werden.

Aus Gründen der Effizienz und des Speicherbedarfs wird nach [8] die Jacobi-Matrix  $\frac{\partial \vec{R}}{\partial \vec{W}}$  mittels einer ersten Ordnung Diskretisierung  $\frac{\partial \vec{R}^{1st}}{\partial \vec{W}}$  approximiert. Es besteht Interesse an einer stationären Lösung, daher wird der globale Zeitschritt  $\Delta t$  in Gleichung (2.22) durch einen lokalen Zeitschritt

$$\Delta T := \text{diag}(\text{diag}(\Delta t_i)) \in \mathbb{R}^{5N \times 5N} \quad \text{mit} \quad (2.23)$$

$$\begin{aligned} \Delta t_i &= \text{CFL} \cdot \text{vol}(\Omega_i) \left[ \sum_{j \in \mathcal{N}(i)} \frac{1}{2} (|V_{ij}| + a_{ij} \text{svol}(\Omega_{ij})) \right. \\ &\quad \left. + \frac{C_v (\mu_{eff})_{ij} \text{svol}(\Omega_{ij})}{\|\vec{x}_{\vec{p}i} - \vec{x}_{\vec{p}j}\|_2 \rho_i} \max \left\{ \frac{4}{3}, \frac{(k_{eff})_{ij} (\kappa - 1)}{(\mu_{eff})_{ij}} \right\} \right]^{-1}, \quad C_v := 8 \end{aligned} \quad (2.24)$$

ersetzt [15], um die Konvergenz zu beschleunigen. Zusammen mit dem Einführen eines Relaxationsparameters  $\varepsilon$ , wird Gleichung (2.22) schließlich durch

$$\left( (\Delta T)^{-1} \mathbf{M} + \varepsilon \alpha_{jj} \frac{\partial \vec{R}^{1st}}{\partial \vec{W}} \right) \vec{h}_j = \alpha_{j+1,j} \vec{R} \left( \vec{W}^{(j-1)} \right) \quad (2.25)$$

ersetzt. Zum approximativen Lösen der Turbulenzgleichung (2.12b) wird statt Gleichung (2.23) der Zusammenhang

$$\Delta T := \text{diag}(\Delta t_i) \in \mathbb{R}^{N \times N}$$

mit Gleichung (2.24) verwendet.

Der mehrstufige Ansatz, in Form eines impliziten Runge-Kutta-Verfahrens, sowie lokale Zeitschritte sollen das Verfahren stabilisieren. Wenn die Stufenanzahl  $s$ , der Relaxationsparameter  $\varepsilon$  sowie die Faktoren  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{21}$  den Wert Eins annehmen und zudem die Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl gegen Unendlich strebt, dann wird der oben beschriebene Lösungsalgorithmus (2.20) wieder zu einem Newton-Verfahren. Die Courant-Friedrichs-Lewy-Zahl (CFL-Zahl) stellt bei einem expliziten Verfahren ein Maß dafür dar, wie viele Gitterzellen weit sich eine betrachtete Strömungsgröße pro Zeitschritt maximal fortbewegen darf

$$CFL = u \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x},$$

mit der Strömungsgeschwindigkeit  $u$  sowie der Gitterweite  $\Delta x$  und dem Zeitschritt  $\Delta t$ . Bei einem impliziten Verfahren, wie es hier vorliegt, kann die CFL-Zahl hingegen als Stabilisierungsmaß angesehen werden. Je niedriger sie ist, desto stabiler verläuft im Allgemeinen die Berechnung ab.

Innerhalb des impliziten Runge-Kutta-Verfahrens entsteht ein inneres, lineares Gleichungssystem (2.25) durch Linearisierung des nichtlinearen Gleichungssystems. Die Lösung des inneren, linearen Gleichungssystems (2.25) kann mittels verschiedener Löser linearer Gleichungssysteme approximiert werden. Dies kann z. B. ein simples Splitting-Verfahren alleinstehend oder als sogenannter Glätter innerhalb eines linearen Mehrgitterverfahrens sein. Beide Verfahren sollen im nächsten Kapitel vorgestellt werden, da sie ein Hauptbestandteil der Untersuchungen dieser Arbeit sind.





# 3 | Lösen des linearen Gleichungssystems

Ein großes lineares Gleichungssystem exakt zu lösen, ist in den meisten Fällen mit einem annehmbaren Aufwand nicht zu erreichen. Es werden daher häufig Iterationsverfahren verwendet, um die Lösung mit einem vertretbaren Aufwand zu approximieren.

## 3.1 | Lineare Iterationsverfahren

Als eine Unterklasse der Iterationsverfahren sollen die linearen Iterationsverfahren im kommenden Abschnitt, in Anlehnung an [2] jedoch mit zahlreichen Zwischenschritten ergänzt, vorgestellt werden.

### Lineares Modellproblem zur Herleitung linearer Iterationsverfahren

Gegeben sei das lineare Modellproblem

$$\mathbf{A}_{sys} \vec{r} = \vec{b}, \quad (3.1)$$

mit der nicht singulären Systemmatrix  $\mathbf{A}_{sys} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , der unbekannten Lösung  $\vec{r} \in \mathbb{R}^N$  sowie der rechten Seite  $\vec{b} \in \mathbb{R}^N$ . Wird eine invertierbare Matrix  $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  eingeführt, so kann

$$\mathbf{A}_{sys} = \mathbf{B} + (\mathbf{A}_{sys} - \mathbf{B})$$

geschrieben werden und in das lineare Modellproblem (3.1) eingesetzt werden, sodass sich

$$\begin{aligned} \mathbf{B} \vec{r} + (\mathbf{A}_{sys} - \mathbf{B}) \vec{r} &= \vec{b} \quad \Longleftrightarrow \quad \vec{r} = \mathbf{B}^{-1} \vec{b} - \mathbf{B}^{-1} (\mathbf{A}_{sys} - \mathbf{B}) \vec{r} \\ &= (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{sys}) \vec{r} + \mathbf{B}^{-1} \vec{b} \end{aligned}$$

ergibt, mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ . Somit ergibt sich das Fixpunktproblem

$$\vec{r} = \sigma(\vec{r}) \quad \text{mit} \quad \sigma(\vec{r}) = (\mathbf{I} - \mathbf{B}^{-1} \mathbf{A}_{sys}) \vec{r} + \mathbf{B}^{-1} \vec{b}.$$

Die Iterationsmatrix  $\mathbf{M}_{iter} \in \mathbb{R}^{N \times N}$  des Iterationsverfahrens wird definiert durch

$$\mathbf{M}_{iter} := \mathbf{I} - \mathbf{C}_{app} \mathbf{A}_{sys},$$

wobei eine approximative Inverse für  $\mathbf{A}_{sys}$ , namentlich  $\mathbf{C}_{app} \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , eingeführt wird. Ist  $\mathbf{C}_{app}$  invertierbar, dann wird die Inverse mit  $\mathbf{B}$  betitelt und es wird  $\mathbf{B}^{-1}$  anstelle  $\mathbf{C}_{app}$  geschrieben [2]. Die Iterationsvorschrift des Fixpunktproblems kann somit aufgestellt werden zu

$$\vec{r}^{(m+1)} = (\mathbf{I} - \mathbf{C}_{app} \mathbf{A}_{sys}) \vec{r}^{(m)} + \mathbf{C}_{app} \vec{b}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Um die exakte Lösung  $\vec{r}$  des linearen Modellproblems anzunähern, kann somit ein lineares Iterationsverfahren der Form

$$\vec{r}^{(m+1)} := \vec{r}^{(m)} + \mathbf{C}_{app} (\vec{b} - \mathbf{A}_{sys} \vec{r}^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}_0 \quad (3.2)$$

verwendet werden. Dafür benötigt wird ein beliebiger Initialvektor  $\vec{r}^{(0)} \in \mathbb{R}^N$  und eine approximative Inverse  $\mathbf{C}_{app}$  für  $\mathbf{A}_{sys}$ . Das lineare Iterationsverfahren heißt konvergent, wenn für einen beliebigen Startvektor  $\vec{r}^{(0)}$  die Folge  $\vec{r}^{(m)}$  mit  $m \in \mathbb{N}_0$  gegen die exakte Lösung  $\vec{r}$  konvergiert.

### Konvergenz linearer Iterationsverfahren

Betrachtet man die Konvergenz eines linearen Iterationsverfahrens der oben vorgestellten Form, dann lassen sich nach [2] und [16] vier Aussagen treffen:

- I) Ist die Iteration konsistent, dann gilt für die Iterationsfehlerabschätzung
 
$$\|\vec{r} - \vec{r}^{(m+1)}\| \leq \|\mathbf{M}_{iter}\| \|\vec{r} - \vec{r}^{(m)}\|, \quad \|\vec{r} - \vec{r}^{(m)}\| \leq \|\mathbf{M}_{iter}\|^{(m)} \|\vec{r} - \vec{r}^{(0)}\|$$
 mit dem Iterationsschritt  $m$ .
- II) Genau dann, wenn der Spektralradius der Iterationsmatrix mit
 
$$\rho(\mathbf{M}_{iter}) < 1$$
 abschätzbar ist, konvergiert das Iterationsverfahren.
- III) Die Gültigkeit der Abschätzung
 
$$\|\mathbf{M}_{iter}\| < 1$$
 in einer beliebigen Matrixnorm  $\|\dots\|$  ist für die Konvergenz des Iterationsverfahrens hinreichend.
- IV) Die Invertierbarkeit der approximativen Inversen  $\mathbf{C}_{app}$  ist notwendig für die Konvergenz des Iterationsverfahrens.

### Splitting-Verfahren

Die Frage ist nun welche Form die approximative Inverse  $\mathbf{C}_{app}$  annimmt. Eine Möglichkeit stellen die sogenannten Splitting-Verfahren dar. Nach [2] beruhen Splitting-Verfahren auf einer additiven Aufspaltung

$$\mathbf{A}_{sys} = \mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R}, \tag{3.3}$$

der Systemmatrix in ihre Diagonalmatrix  $\mathbf{D}$  und jeweils eine strikte obere sowie untere Dreiecksmatrix  $\mathbf{L}$  und  $\mathbf{R}$ . Veranschaulichend kann

$$\begin{pmatrix} * \\ * \\ * \end{pmatrix}_{N \times N} = \begin{pmatrix} * & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & * \end{pmatrix}_{N \times N} + \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 \\ & \ddots & \vdots \\ * & & 0 \end{pmatrix}_{N \times N} + \begin{pmatrix} 0 & & * \\ \vdots & \ddots & \\ 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}_{N \times N}$$

geschrieben werden. Die drei Anteile der Systemmatrix können in einigen verschiedenen Kombinationen als approximative Inverse verwendet werden. Es ergeben sich verschiedenste Iterationsverfahren in Abhängigkeit von den Bestandteilen der Systemmatrix, die als Kombination für die approximative Inverse verwendet werden. Im Folgenden sollen mit Hilfe des linearen Modellproblems beispielhaft zwei der bekanntesten linearen Iterationsverfahren hergeleitet werden – das **Jacobi-** sowie das **Gauß-Seidel-Verfahren**.

Das lineare Modellproblem (3.1) wird erneut betrachtet und die additive Aufspaltung (3.3) der Systemmatrix eingesetzt

$$\mathbf{A}_{sys} \vec{r} = (\mathbf{D} + \mathbf{L} + \mathbf{R}) \vec{r} = \vec{b},$$

so kann gleichwertig auch

$$\mathbf{D}\vec{r} + (\mathbf{L} + \mathbf{R})\vec{r} = \vec{b} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})\vec{r} + \mathbf{R}\vec{r}$$

geschrieben werden. Wird jeweils ein Teil der linken Seite auf die rechte Seite gebracht ergeben sich

$$\mathbf{D}\vec{r} = \vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R})\vec{r} \quad \text{und} \quad (\mathbf{D} + \mathbf{L})\vec{r} = \vec{b} - \mathbf{R}\vec{r}.$$

Durch weiteres Umformen resultieren die zwei Fixpunktprobleme

$$\vec{r} = \mathbf{D}^{-1}(\vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R})\vec{r}) \quad \text{und} \quad \vec{r} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\vec{b} - \mathbf{R}\vec{r}).$$

Aus dem ersten Ausdruck ergibt sich die Iterationsvorschrift für das Jacobi-Verfahren mit

$$\vec{r}^{(m+1)} = \mathbf{D}^{-1}(\vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R})\vec{r}^{(m)}), \quad m \in \mathbb{N}_0$$

und aus dem zweiten Ausdruck ergibt sich die Iterationsvorschrift für das Gauß-Seidel-Verfahren

$$\vec{r}^{(m+1)} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\vec{b} - \mathbf{R})\vec{r}^{(m)}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Ziel ist es nun diese beiden Iterationsvorschriften so umzuformen, dass ein Vergleich mit Gleichung (3.2) gezogen werden kann

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(m+1)} &= \mathbf{D}^{-1}(\vec{b} - (\mathbf{L} + \mathbf{R})\vec{r}^{(m)}) \\ &= \vec{r}^{(m)} - \vec{r}^{(m)} + \mathbf{D}^{-1}\vec{b} - \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R})\vec{r}^{(m)} \\ &= \vec{r}^{(m)} + \mathbf{D}^{-1}\vec{b} - (\mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R}))\vec{r}^{(m)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{I} + \mathbf{D}^{-1}(\mathbf{L} + \mathbf{R}) = \mathbf{D}^{-1}\mathbf{A}_{sys} \\ &= \vec{r}^{(m)} + \mathbf{D}^{-1}(\vec{b} - \mathbf{A}_{sys}\vec{r}^{(m)}), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{r}^{(m+1)} &= (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\vec{b} - \mathbf{R})\vec{r}^{(m)} \\ &= \vec{r}^{(m)} - \vec{r}^{(m)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\vec{b} - (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{R}\vec{r}^{(m)} \\ &= \vec{r}^{(m)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\vec{b} - (\mathbf{I} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{R})\vec{r}^{(m)} \quad \text{mit} \quad \mathbf{I} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{R} = \\ &\quad (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}\mathbf{A}_{sys} \\ &= \vec{r}^{(m)} + (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}(\vec{b} - \mathbf{A}_{sys}\vec{r}^{(m)}). \end{aligned}$$

Ein Koeffizientenvergleich mit der allgemeinen Form des linearen Iterationsverfahrens (3.2) zeigt, dass beim Jacobi-Verfahren die Inverse der Diagonalmatrix der Systemmatrix als approximative Inverse verwendet wird  $\mathbf{C}_{app} = \mathbf{D}^{-1}$ . Beim Gauß-Seidel-Verfahren wird hingegen die Inverse der Summe aus Diagonalmatrix und unterer Dreiecksmatrix als approximative Inverse verwendet  $\mathbf{C}_{app} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}$ .

In Komponentenschreibweise und mit Einführung eines Relaxationsparameters  $\omega$  lautet das Jacobi-Verfahren nach [14]

$$r_i^{(m+1)} = (1 - \omega)r_i^{(m)} + \omega \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}r_j^{(m)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

und das Gauß-Seidel-Verfahren lautet nach [14] in Komponentenschreibweise

$$r_i^{(m+1)} = (1 - \omega)r_i^{(m)} + \omega \frac{1}{a_{ii}} \left[ b_i - \sum_{j=1}^n a_{ij}r_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}r_j^{(m)} \right], \quad i = 1, 2, \dots, n; \quad m = 0, 1, 2, \dots$$

Hier sind die einzelnen Elemente schon bekannter Komponenten mit den Indizes  $i$  und  $j$  versehen. Beispielsweise steht  $a_{ii}$  für die Diagonalelemente der Systemmatrix  $\mathbf{A}_{sys}$ .

Es wird entlang einer Linie  $L_i = \{l_i^1, \dots, l_i^{r_i}\}$  die korrespondierende Block-Tridiagonalmatrix  $\mathbf{Tri}_{L_i} \in \mathbb{R}^{(N_{eq}r_i) \times (N_{eq}r_i)}$  eingeführt

$$\mathbf{Tri}_{L_i} := \begin{pmatrix} A_{l_i^1, l_i^1} & A_{l_i^1, l_i^2} & & & \\ A_{l_i^2, l_i^1} & A_{l_i^2, l_i^2} & A_{l_i^2, l_i^3} & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & A_{l_i^{r_i-1}, l_i^{r_i-2}} & A_{l_i^{r_i-1}, l_i^{r_i-1}} & A_{l_i^{r_i-1}, l_i^{r_i}} \\ & & & A_{l_i^{r_i}, l_i^{r_i-1}} & A_{l_i^{r_i}, l_i^{r_i}} \end{pmatrix}_{(N_{eq}r_i) \times (N_{eq}r_i)}.$$

Stellt  $\mathbf{Tri}_{L_i}$  anstelle von  $\mathbf{A}_{sys}$  die neue Systemmatrix dar, dann ergeben sich für das relaxierte Block-Linien-Jacobi-Verfahren sowie das relaxierte Block-Linien-Gauß-Seidel-Verfahren nach [4, 8] in Komponentenschreibweise

$$r_{L_i}^{(m+1)} = (1 - \omega)r_{L_i}^{(m)} + \omega \mathbf{Tri}_{L_i}^{-1} \left( b_{L_i} - \sum_{\substack{j \in L_1, \dots, L_n \\ j \neq L_i}} A_{L_i, j} r_j^{(m)} \right),$$

$$r_{L_i}^{(m+1)} = (1 - \omega)r_{L_i}^{(m)} + \omega \mathbf{Tri}_{L_i}^{-1} \left( b_{L_i} - \sum_{\substack{j \in L_1, \dots, L_{i-1} \\ j \neq L_i}} A_{L_i, j} r_j^{(m+1)} - \sum_{j \in \{1, \dots, N\} \setminus \{L_1, \dots, N\}} A_{L_i, j} r_j^{(m)} \right).$$

In dem Fall, dass Linieninformationen nicht verfügbar sind, reduzieren sich die beiden Verfahren zu dem relaxierten Block-Jacobi-Verfahren sowie dem relaxierten Block-Gauß-Seidel-Verfahren

$$r_i^{(m+1)} = (1 - \omega)r_i^{(m)} + \omega (A_{i,i})^{-1} \left( b_{L_i} - \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{N_{elem}} A_{i,j} r_j^{(m)} \right),$$

$$r_i^{(m+1)} = (1 - \omega)r_i^{(m)} + \omega (A_{i,i})^{-1} \left( b_{L_i} - \sum_{j=1}^{i-1} A_{i,j} r_j^{(m+1)} - \sum_{j=i+1}^{N_{elem}} A_{i,j} r_j^{(m)} \right).$$

Wird für das Block-Linien-Gauß-Seidel-Verfahren und das Block-Gauß-Seidel-Verfahren ein Vorwärtseinsetzen von einem Rückwärtseinsetzen gefolgt, dann werden diese Verfahren nach [4] Block-symmetrisches-Linien-Gauß-Seidel-Verfahren und Block-symmetrisches-Gauß-Seidel-Verfahren genannt.

Wie bereits erwähnt, führt die Verwendung von verschiedenen approximativen Inversen zu den unterschiedlichsten Iterationsverfahren von denen beispielhaft einige aus [2] genannt wer-

den sollen:

Jacobi-Verfahren	: $\mathbf{C}_{app} = \mathbf{D}^{-1}$ ,
Gedämpftes Jacobi-Verfahren	: $\mathbf{C}_{app} = \omega \mathbf{D}^{-1}$ ,
Gauß-Seidel-Verfahren	: $\mathbf{C}_{app} = (\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}$ ,
Überrelaxationsverfahren	: $\mathbf{C}_{app} = \omega(\mathbf{D} + \omega \mathbf{L})^{-1}$ ,
Symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren	: $\mathbf{C}_{app} = (\mathbf{D} + \mathbf{R})^{-1} \mathbf{D}(\mathbf{D} + \mathbf{L})^{-1}$ ,

mit dem Relaxationsparameter  $\omega$ , für den meist Werte  $\omega \in (0, 2)$  ausgewählt werden [2, 14]. In dem Fall, dass Werte  $\omega \in (0, 1]$  verwendet werden, wird  $\omega$  auch Dämpfungsparameter genannt. Man spricht von Unterrelaxation, wenn  $\omega < 1$  gilt. Im Fall von  $\omega > 1$  spricht man hingegen von Überrelaxation. [2, 14]

Wird eine Aussage über die Konvergenzgeschwindigkeit des Iterationsverfahrens gesucht, insofern die Konvergenz denn gegeben ist, dann ist der Spektralradius der Iterationsmatrix  $\rho(\mathbf{M}_{iter})$  nach [2] ein Maß dafür. Es sei kurz erwähnt, dass der Spektralradius einer Matrix der Betrag des betragsmäßig größten Eigenwertes ist. Im Allgemeinen gilt, dass je kleiner der Spektralradius der Iterationsmatrix ist, desto schneller konvergiert das Iterationsverfahren. Es lässt sich jedoch beobachten, dass die genannten, einfachen Iterationsverfahren bei feinen Diskretisierungen nicht sonderlich effizient sind. Der Spektralradius der Iterationsmatrix strebt für immer feinere Diskretisierungen gegen Eins. Wie zuvor bei Aussage II) erwähnt, konvergieren lineare Iterationsverfahren, somit auch die Unterklasse der einfachen Iterationsverfahren, nur solange der Spektralradius der Iterationsmatrix kleiner Eins ist. Mit zunehmender Feinheit der Diskretisierung wird das Konvergenzverhalten der einfachen Iterationsverfahren folglich immer schlechter. Exemplarisch verhält sich in [2] der Spektralradius der Iterationsmatrix eines Gauß-Seidel-Verfahrens für eine Finite-Volumen-Diskretisierung eines reinen Diffusionsproblems wie  $1 - \mathcal{O}(h)$ . In diesem Fall stellt  $h$  die verwendete Gitterweite dar.

Die langsame Konvergenzrate der einfachen Iterationsverfahren ist auf die langwelligen Fehlerkomponenten zurückzuführen, die, bezogen auf die zugrunde liegende Gitterstruktur, einen glatten Anschein haben. Die kurzwelligen Fehleranteile werden hingegen von einfachen Iterationsverfahren meistens sehr schnell geglättet. Das ist der Grund dafür, dass einfache Iterationsverfahren auch Glätter genannt werden.

### Fehlerglättung einer Finite-Volumen diskretisierten, eindimensionalen Laplace-Gleichung

Es wird die homogene Poisson-Gleichung, respektive die Laplace-Gleichung, als eindimensionales Modellproblem eingeführt. Sie lautet für die zweimal stetig differenzierbare Funktion  $r \in C^2[0, 1]$

$$\nabla^2 r = 0 \implies \frac{d^2 r(x)}{dx^2} = 0 \quad \text{für } r, x \in \mathbb{R}^1.$$

Betrachtet werden soll die eindimensionale Laplace-Gleichung auf dem Intervall  $[0, 1]$  mit homogenen Dirichlet-Randbedingungen. Das formulierte Randwertproblem lautet

$$\begin{aligned} \frac{d^2 r(x)}{dx^2} &= 0, & x &\in [0, 1], \\ r(0) &= 0, \\ r(1) &= 0. \end{aligned}$$

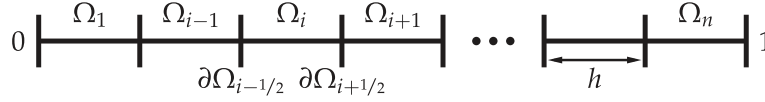


Abbildung 3.1: Dargestellt ist das mit der Gitterbreite  $h$  diskretisierte Intervall  $[0, 1]$  und seine  $n$  gleichgroßen Kontrollvolumen  $\Omega_i$ , mit  $i = 1, \dots, n$ .

Um dieses eindimensionale Modellproblem numerisch zu lösen, könnte ein zentraler Differenzenquotient zur Approximation der zweiten Ableitung verwendet werden, dieses Vorgehen würde zu einem Finite-Differenzen-Verfahren führen. Es soll jedoch an dieser Stelle die Idee eines Finite-Volumen-Verfahrens aufgegriffen und veranschaulicht werden.

Dabei wird zunächst die Differentialgleichung über ein Kontrollvolumen  $\Omega$  integriert. Der Gauß'sche Integralsatz wird dann dazu verwendet, die Divergenz von  $\nabla \vec{r}$  als Fluss über die Berandung  $\partial\Omega$  des Kontrollvolumens auszudrücken

$$\int_{\Omega} \nabla \cdot \nabla \vec{r} \, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \nabla \vec{r} \, dS \implies \int_{\Omega} \frac{d}{dx} \cdot \frac{dr}{dx} \, dV = \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \frac{dr}{dx} \, dS.$$

Die Gittererzeugung ist in Abbildung 3.1 zu sehen. Das Intervall  $[0, 1]$  wird in  $n$  gleich große Kontrollvolumen  $\Omega_i$ , mit  $i = 1, \dots, n$  und der Gitterbreite  $h$ , diskretisiert. Größen im Knotenpunkt des Kontrollvolumens  $\Omega_i$  werden mit dem Index  $i$  versehen. Größen, die auf den Zellseitenflächen  $\Omega_i \cap \Omega_{i+1}$  und  $\Omega_i \cap \Omega_{i-1}$  des Kontrollvolumens  $\Omega_i$  ausgewertet werden, bezeichnen wir mit den Indizes  $i - 1/2$  sowie  $i + 1/2$ . Die beiden Anteile der Berandung  $\partial\Omega_i$  des Kontrollvolumens, also die Zellseitenflächen, werden dementsprechend mit  $\partial\Omega_{i-1/2}$  und  $\partial\Omega_{i+1/2}$  betitelt. Folglich lässt sich das Integral über ein Kontrollvolumen umschreiben zu

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \vec{n} \cdot \frac{dr}{dx} \, dS &= \int_{\partial\Omega_{i-1/2}} \vec{n} \cdot \frac{dr}{dx} \, dS + \int_{\partial\Omega_{i+1/2}} \vec{n} \cdot \frac{dr}{dx} \, dS \\ &= -1 \left( \partial\Omega \cdot \frac{dr}{dx} \right) \Big|_{i-1/2} + 1 \left( \partial\Omega \cdot \frac{dr}{dx} \right) \Big|_{i+1/2}. \end{aligned}$$

Die verschiedenen Vorzeichen beider vorläufig resultierenden Terme beruhen darauf, dass die Einheitsnormalenvektoren auf den zwei Zellseitenflächen in unterschiedliche Richtungen weisen. In negative  $x$ -Richtung weist der Einheitsnormalenvektor der auf  $\partial\Omega_{i-1/2}$  steht und in positive  $x$ -Richtung der der auf  $\partial\Omega_{i+1/2}$  steht.

Es wird eine lineare Approximation der Gradienten auf den Zellseitenflächen verwendet, sodass folgt

$$\left( \partial\Omega \cdot \frac{dr}{dx} \right) \Big|_{i+1/2} - \left( \partial\Omega \cdot \frac{dr}{dx} \right) \Big|_{i-1/2} \approx \frac{1}{2} \partial\Omega_i \cdot \frac{r_i - r_{i-1}}{h} - \frac{1}{2} \partial\Omega_i \cdot \frac{r_{i+1} - r_i}{h} = 0,$$

mit  $\partial\Omega_{i\pm 1/2} = \frac{1}{2} \partial\Omega_i$ . Die Gitterbreite  $h$  und die Zellseitenflächen  $\partial\Omega_i$  können aufgrund der homogenen rechten Seite eliminiert werden, sodass sich für das diskrete Randwertproblem

$$\begin{aligned} r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} &= 0, \quad i = 1, \dots, n, \\ r_0 &= 0, \\ r_{n+1} &= 0 \end{aligned}$$

ergibt. In algorithmischer Schreibweise folgt nach [14] zum Lösen des diskreten Randwertproblems mittels eines Thomas-Algorithmusses

$$\begin{aligned} \cancel{r_0} - 2r_1 + r_2 = 0 &\implies r_1^{(m)} = \frac{r_2^{(m)}}{2} \\ r_{i-1} - 2r_i + r_{i+1} = 0 &\implies r_i^{(m)} = \frac{r_{i-1}^{(m)} + r_{i+1}^{(m)}}{2}, \quad i = 2, \dots, n-1 \\ r_{n-2} - 2r_{n-1} + \cancel{r_n} = 0 &\implies r_{n-1}^{(m)} = \frac{r_{n-2}^{(m)}}{2}. \end{aligned}$$

Diese Ausdrücke werden iterativ für die Knoten in der Reihenfolge von 1 bis  $n-1$  durchlaufen und für  $m$  Iterationen wiederholt. Als Anfangswert soll die Summe zweier trigonometrischer Funktionen mit verschiedenen Frequenzen angenommen werden

$$(r^{(0)}(x))_{k,p} = \sin(k\pi x) + \sin(p\pi x), \quad x \in ]0, 1[, \quad k, p \in \mathbb{N}.$$

Die Anfangswerte der diskreten Werte  $r_i$  lauten somit

$$(r_i^{(0)})_{k,p} = \sin\left(k\pi \frac{i}{n}\right) + \sin\left(p\pi \frac{i}{n}\right), \quad i = 1, \dots, n, \quad k, p \in \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Der periodische Anfangswert entspricht zu Beginn bei  $m = 0$  dem Iterationsfehler  $r_i^{(\infty)} - r_i^{(m)}$  aufgrund der trivialen Lösung  $r_i^{(\infty)} = 0$ , mit  $i = 0, \dots, n$ . Es kann nun für eine variable Gitterauflösung  $n$  untersucht werden, wie verschieden frequente Fehlerterme nach gegebener Iterationsanzahl  $m$  durch den Gauß-Seidel-Algorithmus geglättet werden. Mittels  $k$  und  $p$  können zusätzlich die Periodizitäten der Fehlerterme variiert werden.

Im Folgenden wird das Intervall  $[0, 1]$  mit  $n = 100$  in 100 Teilintervalle diskretisiert. Das ergibt 101 Knotenpunkte und eine Gitterweite von  $h = 0,01$ . Für die diskreten Anfangswerte (3.4) werden die frequenzbestimmenden Parameter  $k = 2$  und  $p = 16$  gewählt. In Abbildung 3.2 sind die Werte  $r_i$  mit  $i = 0, \dots, 100$  bei den Iterationsanzahlen  $m = \{0, 2, 5, 10, 20\}$  aufgetragen. Die Werte entsprechen, wie oben erwähnt, zu jedem Iterationsschritt dem Iterationsfehler aufgrund der trivialen Lösung  $r_i^{(\infty)} = 0$ , mit  $i = 0, \dots, 100$ . Für den Anfangswert  $r_i^{(0)}$  ist die Überlagerung der zwei Sinusse zu erkennen und der Iterationsfehler liegt im Intervall  $[-2, 2]$ . Mit zunehmender Iterationsanzahl des Gauß-Seidel-Algorithmus ist zu beobachten, dass der kurzwellige Fehleranteil mit  $p = 16$  relativ schnell geglättet wird und nach 20 Iterationsschritten fast vollkommen verschwunden ist. Wohingegen der langwellige Fehleranteil mit  $k = 2$  fast vollkommen bestehen bleibt und der Iterationsfehler sich im Intervall  $] -1, 1[$  befindet. Auch weitere Iterationsschritte führen zu keiner merklichen Glättung des langwelligen Fehlerterms.

Um eine gute Glättung mittels weniger Iterationsschritte für den langwelligen Fehlerterm unter Verwendung des Gauß-Seidel-Algorithmus zu erzielen, muss der langwellige Fehlerterm wie ein kurzwelliger Fehlerterm erscheinen. Das wird erreicht indem die Werte  $r_i^{(20)}$  mit  $i = 0, \dots, 100$  auf ein gröberes Gitter mit  $r_j^{(0)}$ ,  $j = 0, \dots, 25$ , übertragen werden. In diesem Fall wird der Fehler jedes vierten Knotens des feinen Gitters nach 20 Iterationsschritten als Anfangswert für ein Gitter, dass um den Faktor 4 größer ist, verwendet

$$r_j^{(0)} := r_i^{(20)}, \quad \text{mit } j = 0, 1, \dots, 25, \quad i = 0, 4, 8, \dots, 100.$$



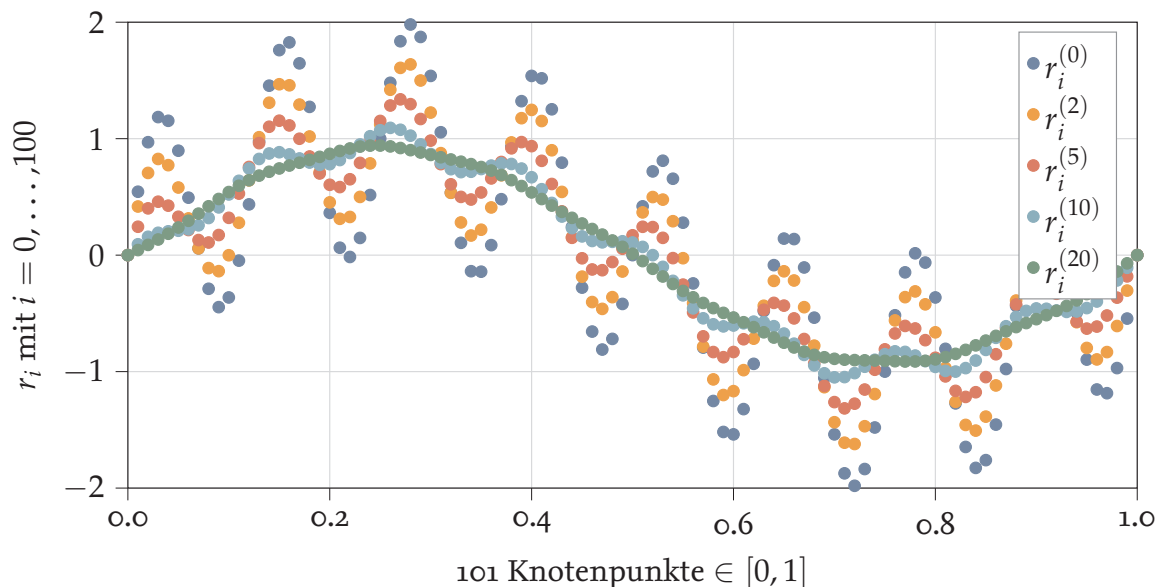


Abbildung 3.2: Summe aus langwelligem und kurzwelligem Fehlerterm auf dem feinen Gitter nach 0 bis 20 Gauß-Seidel-Iterationsschritten

In Abbildung 3.3 sind die Fehler  $r_j$  mit  $j = 0, \dots, 25$  bei den Iterationsanzahlen  $m = \{0, 2, 5, 10, 20\}$  aufgetragen. Der ursprünglich langwellige Fehlerterm erscheint auf dem gröberen Gitter kurzwellig und kann folglich mittels Gauß-Seidel-Algorithmus schneller geglättet werden. In Abbildung 3.4 sind die Fehler aufgetragen, die nach 20 Iterationsschritten auf dem feinen Gitter und zusätzlichen 20 Schritten auf dem gröberen Gitter übrig bleiben, sowie die Fehler, die nach insgesamt 40 Iterationsschritten auf dem feinen Gitter verbleiben. Es ist deutlich zu erkennen, dass der Fehlerterm auf dem gröberen Gitter nach identisch vielen Iterationsschritten wesentlich glatter ist als der Fehlerterm auf dem feinen Gitter. Zudem hat ein Iterationsschritt auf dem Grobgitter eine um vier verringerte Komplexität, da die Operationsanzahl geviertelt wurde. Es entsteht jedoch ein zusätzlicher Rechenaufwand durch das Erzeugen des Grobgitters, das Übertragen der Werte auf das gröbere Gitter, sowie letztendlich noch der verbleibenden Prolongation der Werte des gröberen Gitters auf das feinere Gitter, da eine Lösung auf dem feinen und nicht dem gröberen Gitter gesucht ist.

Das beispielhaft dargestellte Glättungsverhalten von einfachen, linearen Iterationsverfahren kann in Mehrgitterverfahren effizient genutzt werden. Es wird daher im kommenden Abschnitt die Klasse der Mehrgitterverfahren vorgestellt und die Aufgabe des einfachen, linearen Iterationsverfahren aufgezeigt.

## 3.2 | Mehrgitterverfahren

Die feine Diskretisierung eines Rechengebietes führt meist zu einer Systemmatrix großer Dimension  $n$ , die jedoch dünn besetzt ist, also einer Systemmatrix mit ausgesprochen großen Ausmaßen, deren einzelne Einträge jedoch nur selten von Null verschieden sind. Wie zu Beginn dieses Kapitels erwähnt, werden große lineare Gleichungssysteme im allgemeinen mittels eines Iterationsverfahrens approximativ gelöst. Nach [14] ist das Ziel des iterativen Lösens dünn besetzter, linearer Gleichungssysteme ein Verfahren zu entwickeln, dass **asymptotisch optimal** ist. Das bedeutet:



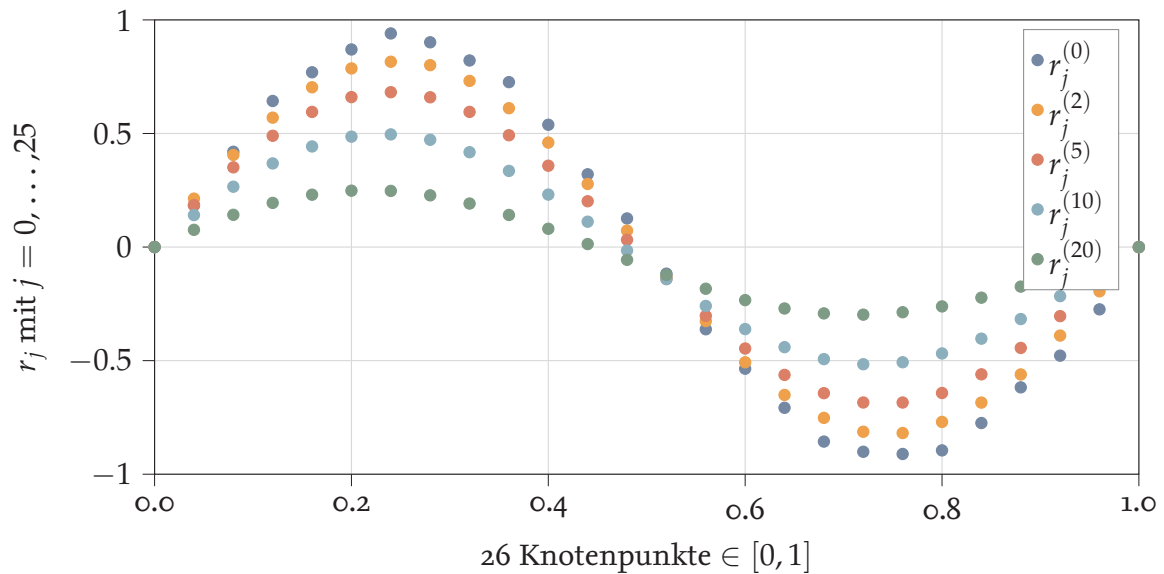


Abbildung 3.3: Vorwiegend langwelliger Fehlerterm erscheint auf dem größeren Gitter kurzwellig und wird nach 0 bis 20 zusätzlichen Gauß-Seidel-Iterationsschritten auf dem größeren Gitter geglättet.

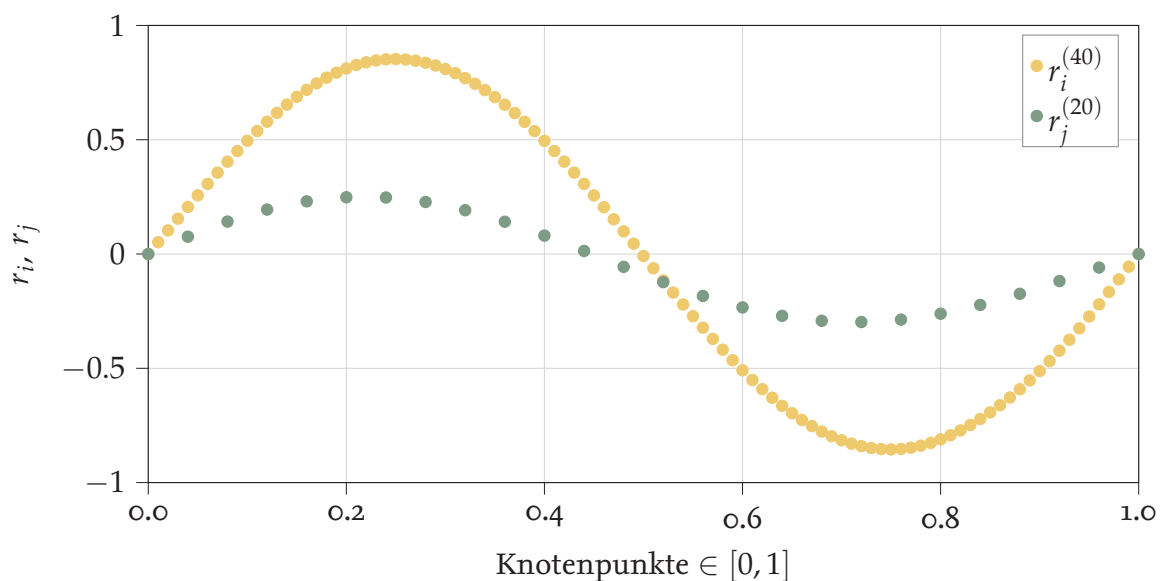


Abbildung 3.4: Vergleich der Fehlerterme nach jeweils insgesamt 40 Gauß-Seidel-Iterationsschritten.  $r_i^{(40)}$  stellt den Fehlerterm nach 40 Iterationsschritten auf dem feinen Gitter dar und  $r_j^{(20)}$  stellt den Fehlerterm nach der Kombination aus 20 Iterationsschritten zuerst auf dem feinen und dann dem größeren Gitter dar.

- I) Nur  $\mathcal{O}(n)$  Operationen werden benötigt,
- II) und der Aufwand ist unabhängig von der Diskretisierungsgröße  $h$ .

Der Rechenaufwand pro Iterationsschritt wächst somit höchstens linear mit der Anzahl der Unbekannten und die Konvergenzrate ist unabhängig von der verwendeten Gitterweite  $h$ . Es wird folglich ein Iterationsverfahren zum approximativen Lösen eines linearen Gleichungssystems

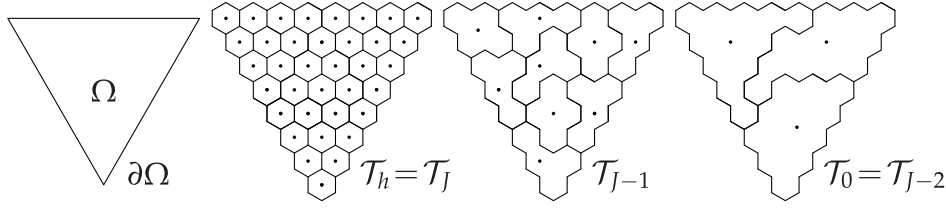


Abbildung 3.5: Auf der linken Seite befindet sich ein willkürliches polyedrisches Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^2$  mit seinem Rand  $\partial\Omega$ . In der Mitte sowie auf der rechten Seite befinden sich mögliche Dualgitter der Triangulierungen für die Gitterlevel  $J$ ,  $J - 1$  sowie  $J - 2$ .

tems gesucht, dessen Operationsanzahl in der Größenordnung der Dimension  $n$  der Systemmatrix liegt und dessen Rechenaufwand unabhängig von der Feinheit der Diskretisierung des Rechengebietes ist. Im hier gezeigten Fall des approximativen Lösens der RANS-Gleichungen wird es wahrscheinlich nicht möglich sein ein asymptotisch optimales Verfahren zu finden. Wenige Verfahren besitzen überhaupt diese Eigenschaft, wobei Mehrgitterverfahren zu dieser Gruppe gehören können. Diese These ist bislang nur für Modellprobleme beweisbar, dennoch ist es im Experiment laut [14] für allgemeine Probleme zu beobachten.

Mehrgitterverfahren wurden ursprünglich von Brandt [17] als Beschleunigungsverfahren für Lösungsalgorithmen entwickelt. Die Idee eines Mehrgitterverfahrens ist die Kombination eines einfachen, iterativen Lösungsalgorithmus mit einer Hierarchie von Operatoren, sodass das originale Problem effizient gelöst werden kann. Der einfache, iterative Lösungsalgorithmus innerhalb des Mehrgitterverfahrens konvergiert pro Mehrgitterschritt nicht aus, sondern glättet lediglich den Fehler [4]. Die verbleibenden niederfrequenten Fehlerterme werden durch das Mehrgitter reduziert. Die Eigenschaft des Fehlerglättens macht die einfachen Iterationsverfahren zum idealen Verfahrensteil für ein Mehrgitterverfahren [14].

Mehrgitterverfahren sind einfach zu implementieren bei einem strukturierten Gitter mit bekannten Nachbarschaftsbeziehungen der Gitterpunkte. Schwieriger ist die Implementierung bei unstrukturierten Gittern. Die automatisch generierten Gitter lassen keine Annahmen über das Gitter für den Lösungsalgorithmus zu, dass erschwert das Finden effektiver Lösungsalgorithmen. [4]

### Lineares Mehrgitter zum Lösen linearer Gleichungsverfahren

Im Folgenden soll zunächst näher auf die Idee eines linearen Mehrgitters eingegangen werden. Dazu wird zunächst ein polyedrisches Gebiet  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  eingeführt, beispielhaft dargestellt auf der linken Seite der Abbildung 3.5 für  $N = 2$  mit einer willkürlichen Form. Der Rand des Gebietes  $\Omega$  wird mit  $\partial\Omega$  betitelt. Die Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  besteht aus Simplexten mit der Kantenlänge  $h$ , die der Gitterweite  $h$  der Triangulierung entsprechen. Die Diskretisierung, bezüglich einer Triangulierung  $\mathcal{T}_h$ , eines Randwertproblems, dass auf einem polyedrischen Gebiet  $\Omega \in \mathbb{R}^N$  formuliert ist, kann zu einem linearen Gleichungssystem führen. Ebenso wurde in Kapitel 2.7.1 gezeigt, dass das approximative Lösen der diskretisierten RANS-Gleichungen mittels eines Runge-Kutta-Verfahrens zu einem inneren linearen Gleichungssystem führt. Für das zu lösende, lineare Gleichungssystem wird stellvertretend erneut ein lineares Modellproblem betrachtet mit der Form

$$\mathbf{A}_h \vec{r}_h = \vec{b}_h, \quad (3.5)$$

der Systemmatrix  $\mathbf{A}_h \in \mathbb{R}^{N \times N}$ , der unbekannten Lösung  $\vec{r}_h \in \mathbb{R}^N$  sowie der rechten Seite  $\vec{b}_h \in \mathbb{R}^N$ . Der Index  $h$  weist auf die Gitterweite  $h$  der zugrundeliegenden Triangulierung  $\mathcal{T}_h$  hin. Es wird für ein Mehrgitter eine Hierarchie von Triangulierungen benötigt, die als Multi-triangulierung

$$\mathcal{M} = (\mathcal{T}_0, \dots, \mathcal{T}_J)$$

bezeichnet wird. Die Endtriangulierung  $\mathcal{T}_J$  stellt die Triangulierung mit der höchsten Auflösung dar, siehe Abbildung 3.5 und es gilt  $\mathcal{T}_J = \mathcal{T}_h$ .

Im Folgenden wird eine neue Parametrisierung der einzelnen Größen eines Gitterlevels mittels der Stufenzahl  $\{k \in \mathbb{N} | 0 \leq k \leq J\}$  eingeführt. Zudem wird die Menge der Eckpunkte von  $\mathcal{T}_k$ , die nicht auf dem Rand  $\partial\Omega$  liegen, mit

$$\mathcal{N}_k = \{x_1^{(k)}, \dots, x_{N_k}^{(k)}\}$$

beschrieben. Die Mächtigkeit von  $\mathcal{N}_k$  wird mit  $N_k$  betitelt, sie stellt die Anzahl der beschriebenen Eckpunkte dar. Mit  $X_k := \mathbb{R}^{N_k}$  wird der Raum aller Vektoren  $\vec{r}_k = (\vec{r}_{k,1}, \dots, \vec{r}_{k,N_k})^T$  benannt. Das zu lösende Gleichungssystem lautet auf dem feinsten Gitterlevel  $J$  somit

$$\mathbf{A}_J \vec{r}_J = \vec{b}_J. \quad (3.6)$$

Zur Lösung von Gleichung (3.6) durch Anwendung eines linearen Mehrgitterverfahrens wird zunächst mit einigen Iterationsschritten eines einfachen, linearen Iterationsverfahrens aus Kapitel 3.1 begonnen und dafür ein beliebiger Startvektor  $\vec{r}_J^{(0)}$  gewählt. Es ergibt sich eine Näherungslösung  $\vec{r}_J$ , die meist nicht besonders gut ist, jedoch relativ glatt ist bezogen auf die Triangulierung  $\mathcal{T}_J$ . Kurzweilige Fehlerterme wurden durch das einfache Iterationsverfahren binnen weniger Iterationsschritte stark reduziert. Der Fehler  $\vec{e}_J = \vec{r}_J - \vec{r}_J$  genügt nach [2] der Defektgleichung

$$\mathbf{A}_J \vec{e}_J = \vec{d}_J := \vec{b}_J - \mathbf{A}_J \vec{r}_J. \quad (3.7)$$

Für die exakte Lösung von Gleichung (3.6) gilt

$$\vec{r}_J = \vec{r}_J + \vec{e}_J.$$

Die Defektgleichung zu lösen ist nicht einfacher als das Lösen der Gleichung (3.6). Da  $\vec{e}_J$  jedoch relativ glatt auf  $\mathcal{T}_J$  ist, stellt  $\vec{e}_{J-1}$  auf der um eine Stufe gröberen Triangulierung  $\mathcal{T}_{J-1}$  noch eine gute Repräsentation von  $\vec{e}_J$  dar. Gleiches wäre mit der exakten Lösung  $\vec{r}_J$  nur möglich, falls über sie bekannt wäre, dass sie glatt ist bezogen auf  $\mathcal{T}_J$ . Dieser Vorteil der Defektgleichung wird beim Mehrgitterverfahren genutzt. Es kann die Defektgleichung des Gitterlevels  $J$  mittels der Defektgleichung

$$\mathbf{A}_{J-1} \vec{e}_{J-1} = \vec{d}_{J-1}, \quad (3.8)$$

des Gitterlevels  $J - 1$ , auf  $X_{J-1}$  approximiert werden. Ist die Dimension von  $X_{J-1}$  wesentlich kleiner als die Dimension von  $X_J$ , dann ist die Auflösung des gröberen Gitterlevels  $J - 1$  wesentlich geringer. Die Lösung  $\vec{e}_{J-1}$  der Gleichung (3.8) kann dann meist erheblich einfacher bestimmt werden als die Lösung  $\vec{e}_J$  der Gleichung (3.7). Die Lösung  $\vec{e}_{J-1}$  ist somit die einfacher zu bestimmende Approximation der exakten Lösung der Defektgleichung auf der Endtriangulierung.

Zum Lösen der Gleichung (3.8) fehlen noch die beiden Ausdrücke  $\mathbf{A}_{J-1}$  und  $\vec{d}_{J-1}$ . Für  $\mathbf{A}_{J-1}$  kann beispielsweise die Systemmatrix der Diskretisierung auf  $\mathcal{T}_{J-1}$  verwendet werden. In diesem Fall muss jedoch gewährleistet sein, dass das Randwertproblem auf jeder der Triangulierungen diskretisiert ist. Die rechte Seite  $\vec{d}_{J-1}$  sollte nach [2] von  $\vec{d}_J$  linear abhängig sein, um als Resultat ein lineares Mehrgitter zu ermöglichen. Es wird dafür ein linearer Transferoperator

$$R_J : X_J \rightarrow X_{J-1}$$

verwendet, sodass

$$\vec{d}_{J-1} = R_J \vec{d}_J$$

gilt. Eine gängige Bezeichnung eines derartigen Transferoperators lautet **Restriktion**.

Zu Beginn sollte die Korrektur der Näherungslösung  $\vec{r}_J$  mit  $\vec{e}_J$  durchgeführt werden. Bevor nun  $\vec{e}_{J-1}$  statt  $\vec{e}_J$  als Korrektur verwendet werden kann, muss  $\vec{e}_{J-1}$  mittels eines weiteren linearen Transferoperators

$$P_J : X_{J-1} \rightarrow X_J$$

auf  $X_J$  transferiert werden. Dieses Verfahren wird als **Prolongation** bezeichnet und es gilt

$$\vec{e}_J = P_J \vec{e}_{J-1}.$$

Die erste Näherungslösung  $\vec{r}_J$  des einfachen Iterationsverfahrens kann nun mittels

$$\vec{r}_{J,neu} = \vec{r}_J + P_J \vec{e}_{J-1}$$

korrigiert werden. Diese Korrektur wird auch **Grobgitterkorrektur** genannt und lautet nach einsetzen der Defektgleichung ausgeschrieben

$$\vec{r}_{J,neu} = \vec{r}_J + P_J \mathbf{A}_{J-1}^{-1} R_J (\vec{b}_J - \mathbf{A}_J \vec{r}_J). \quad (3.9)$$

Der Vollständigkeit halber wird mit der Einheitsmatrix  $\mathbf{I}_k \in \mathbb{R}^{N_k \times N_k}$  für die Iterationsmatrix der Grobgitterkorrektur des Gitterlevels  $k = J$

$$\mathbf{M}_{iter,J} = \mathbf{I}_J - P_J \mathbf{A}_{J-1}^{-1} R_J \mathbf{A}_J$$

geschrieben.

Wird das Vorgehen knapp zusammengefasst, dann werden zunächst kurzweilige Fehlerterme auf einem feinen Gitterlevel mittels eines einfachen Iterationsverfahrens geglättet, genannt die „Kalkulation des Defektes“. Daraufhin werden die verbleibenden langwelligen Fehlerterme auf ein gröberes Gitter mittels Restriktion transferiert, genannt „Restriktion des Defektes“. Die Defektgleichung wird auf diesem gröberen Gitterlevel gelöst und die Korrektur wird wieder auf das ursprüngliche feine Gitterlevel, per Prolongation, transferiert. Diese beiden Bestandteile werden „Lösung der Grobgittergleichung“ und „Korrektur der Lösung“ genannt. Im Gesamten wird dabei von Grobgitterkorrektur gesprochen. [18]

Im oben vorgestellten Beispiel handelt es sich um ein Zweigitterverfahren, da lediglich die Triangulierungen  $\mathcal{T}_J$  und  $\mathcal{T}_{J-1}$  verwendet werden. Es können jedoch noch weitere Triangulierungen mit einbezogen werden, so kann beispielsweise die approximative Korrektur  $\vec{e}_{J-1}$  unter

Einbeziehung der Triangulierung  $\mathcal{T}_{J-2}$  lediglich mit  $\vec{e}_{J-1}$  angenähert werden. Das klassische Mehrgitterverfahren ergibt sich, wenn alle Triangulierungen der Multileveltriangulierung  $\mathcal{M}$  mit einbezogen werden und nur auf dem größten Gitterlevel  $k = 0$  exakt gelöst wird.

Komponenten, die bei dem Mehrgitterverfahren benötigt werden, sind die Systemmatrizen der einzelnen Gitterlevel mit der dazugehörigen Hierarchie von Triangulierungen, ein einfaches, lineares Iterationsverfahren als Glätter sowie die beiden linearen Transferoperatoren namens Restriktion und Prolongation. Des Weiteren können für das Mehrgitterverfahren einige Parameter gewählt werden. Dazu gehört beispielsweise ein **Mehrgitterzyklus**.

Er bestimmt die Anzahl und Abfolge an rekursiven Aufrufen des Mehrgitterverfahrens, um die Defektgleichung mittels der nächst größeren Triangulierungen zu approximieren. So gibt es beispielsweise 2v-Mehrgitterzyklen. Die 2 beschreibt in diesem Fall die Anzahl an verwendeten Gitterleveln. Es wird das feinste Gitterlevel  $J$  verwendet sowie das Gitterlevel  $J - 1$ . Der 2v-Mehrgitterzyklus beginnt mit dem Vorglätten auf dem Gitterlevel  $J$ . Dabei wird die erste Näherungslösung des Lösungsvektors mittels des verwendeten Glätters ermittelt. In diesem Zusammenhang ergibt sich der Defekt als Abweichung der Näherung vom exakten Lösungsvektor. Der Defekt wird auf das Gitterlevel  $J - 1$  restriktiert. Dort wird die Grobgittergleichung gelöst und die sich ergebende Korrektur wird wieder auf das Gitterlevel  $J$  prolongiert. Mittels der Korrektur ergibt sich eine verbesserte Näherungslösung des Lösungsvektors. Sie wird mittels des verwendeten Glätters auf dem Gitterlevel  $J$  nachgeglättet. [19]

Da vom feinen Gitterlevel zum niedrigeren, größeren Gitterlevel übergegangen wird und wieder zurück zum feinen, wird diese Zyklusart v-Zyklus genannt. Ein 3v- und 4v-Zyklus würden um ein beziehungsweise zwei Gitterlevel erweitert werden. Die benötigte Lösung auf dem größeren Gitterlevel wird dann rekursiv durch einen 2v-Mehrgitterzyklus ermittelt bis das größte Gitterlevel erreicht wird und dort die Defektgleichung gelöst wird. [19]

Es ergeben sich somit innerhalb des Mehrgitterzyklusses weitere Parameter die gewählt werden können. Das sind beispielsweise die Anzahl der Glättungsschritte auf jedem Gitterlevel, sowohl vor als auch nach der Grobgitterkorrektur, namentlich die Anzahl der Vorglättungsschritte und Nachglättungsschritte.

### Hierarchie von Triangulierungen mittels Agglomeration

Im folgenden Teil des Kapitels soll nun der Ausgangszustand, eines klassischen Mehrgitterverfahrens, die Systemmatrix des inneren linearen Gleichungssystems aus Kapitel 2.7.1, diskretisiert auf der feinsten Triangulierung  $\mathcal{T}_J$  des Gitterlevels  $k = J$ , sein. Zum Erstellen der benötigten Systemmatrizen auf größeren Gitterleveln  $\{k \in \mathbb{N} | 0 \leq k \leq J\}$  wird die jeweilige, ein Level feinere, Triangulierung  $\mathcal{T}_{k+1}$  zu einer größeren Triangulierung  $\mathcal{T}_k$  agglomeriert. Bei einem geometrischen Mehrgitter wird das innere lineare Gleichungssystem dann auf dieser größeren Triangulierung erneut diskretisiert und ergibt die Systemmatrix des Gitterlevels. Die grundlegende, implementierte Technik für die Agglomeration ist ein graphengewichteter Algorithmus der MGridGen Bibliothek [20]. Für ausgeprägt anisotrope Zellen wurde er erweitert, siehe [8, 21, 22, 23]. Entlang Grenzschichtbereichen, bei denen die Haftbedingung an den Wänden erfüllt werden muss und es somit zu starken Gradienten kommt, werden Gitterzellen mit großen Seitenverhältnissen verwendet. Diese ermöglichen eine hohe Auflösung in die Richtung starker Gradienten normal zur Hauptströmungsrichtung und eine niedrige Auflösung längs der Hauptströmung. Eine zusätzlich hohe Auflösung in Hauptströmungsrichtung hätte

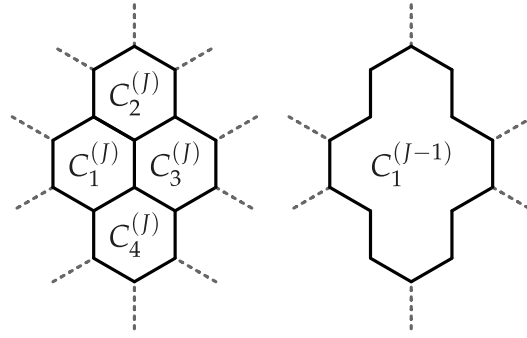


Abbildung 3.6: Vier Dualgitterzellen des Gitterlevels  $J$  werden zu einer einzigen Zelle  $C_1^{(J-1)}$  agglomeriert, nach [8].

zu feine Triangulierungen zur Folge und die benötigte Rechenzeit wäre nicht mehr tragbar. In [4] beschrieben führt das genannte, große Seitenverhältnis, sprich stark in die Länge verzerrte Zellen, jedoch zu einer geometrischen Steifigkeit des diskreten Systems der Grundgleichungen. Um mit starker Anisotropie umzugehen, ist es das Ziel Algorithmen zu entwickeln, die Quellen von Steifigkeit identifizieren, um diese Information dann in den Lösungsalgorithmus einzuspeisen. Werden Zellen eines bekannten Gitters, die Anisotropie aufweisen, zusammen mit ihren Freiheitsgraden zusammengeführt, dann wird die Zusammenführung nach [4] als **Linien** bezeichnet. Ein unstrukturiertes Gitter hat keine Informationen über Linien, diese müssen erst generiert werden. Es wird ein Linien-Such-Algorithmus verwendet, um die Linien-Informationen bereit zu stellen. Entlang der Linien werden bei der Agglomeration nach [4] jeweils zwei Zellen zusammengefügt, bis gegebenenfalls auf einem größeren Gitterlevel, nach mehreren Agglomerationen, die komplette Linie zu einer einzigen Zelle agglomeriert wurde. Ab dann wird sie als normale Zelle weiter behandelt. In den anisotropen Regionen, in denen Linien detektiert werden können, wird die Komplexität somit um den Faktor zwei verringert. In den isotropen Regionen wird durch die Anwendung von MGridGen die Komplexität im Zweidimensionalen um vier und im Dreidimensionalen um acht verringert.

In Abbildung 3.6 ist beispielhaft die Agglomeration von vier Dualgitterzellen des Gitterlevels  $J$  zu einer neuen, agglomerierten Dualgitterzelle des Gitterlevels  $J - 1$  gezeigt.  $C_i^{(k)}$  steht für die  $i$ -te Grobgitterzelle des Gitterlevels  $k$ . Das Gitterlevel  $k$  wird erstellt indem

$$\left\{ C_j^{(J)} : j \in \text{child} \left( C_i^{(k)} \right) \right\}$$

nach [8] zusammengefasst werden, sodass

$$C_j^{(J)} \subset C_i^{(k)}, \quad \bigcup_{j \in \text{child} \left( C_i^{(k)} \right)} C_j^{(J)} = C_i^{(k)}$$

gilt.

### Splitting-Verfahren als Glätter im linearen Mehrgitter

Die Aufgabe des Glätters innerhalb des linearen Mehrgitterverfahrens stellt die Reduktion von Fehleranteilen dar, die bezogen auf die vorliegende Triangulierung einen kurzwelligen Charakter aufweisen. Um eine angemessene Effizienz zu erlangen, sollte der Glätter auf das Randwertproblem angepasst werden. Im Falle des inneren linearen Gleichungssystems wird



für folgende Untersuchungen ein Block-symmetrisches-Linien-Gauß-Seidel-Verfahren sowie ein Block-symmetrisches-Gauß-Seidel-Verfahren verwendet. Einfache Iterationsverfahren, die beispielsweise als Glätter verwendet werden können, wurden in Kapitel 3.1 vorgestellt. Weitere Ausführungen zu den verwendeten Glättern im linearen Mehrgitter sind in [4] zu finden. Angemerkt werden soll, dass sich nach Brandt [24] für ein Konvektions-Diffusions-Problem ein Gauß-Seidel-Algorithmus nur als Glätter eignet, wenn die Reihenfolge der Unbekannten der Strömungsgröße folgt. Wie in [2] beschrieben, ist beobachtbar, dass der Konvektionsanteil der Steifigkeitsmatrix, bei geeigneter Upwind-Diskretisierung, eine untere Dreiecksgestalt annimmt. Unter der Voraussetzung, dass die Eckpunkte der Triangulierung, also des Primärgitters, in Konvektionsrichtung numeriert werden. Ein Gauß-Seidel-Verfahren ist für eine untere Dreiecksmatrix ein exakter Löser. Daher kann die Nummerierung in Konvektionsrichtung die Robustheit eines Mehrgitterverfahrens mit Gauß-Seidel-Glätter verbessern [2]. Bei einem unstrukturierten Gitter ist eine solche Nummerierung schwerlich zu erreichen, insofern ist in solch einem Fall mit einer Einbuße in der Robustheit zu rechnen.

### Lineare Transferoperatoren

Zur Berechnung des Fehlers auf dem agglomerierten Gitterlevel der Stufe  $k$  wird die in [8] beschriebene Vorschrift verwendet. Soll auf dem Gitterlevel  $k$  die vorgesehene Anzahl an Glättungsschritten vollzogen werden, dann werden die bekannten Fehler des vorherigen Iterationsschrittes, des Gitterlevels  $k$ , auf das feinste Gitterlevel  $J$  prolongiert. Dafür wird eine simple Injektion verwendet. Die gröbere Zelle  $C_i^{(k)}$  des Gitterlevels  $k$  gibt den Wert für jede einzelne Zelle  $C_j^{(J)}$  des Gitterlevels  $J$  vor, die auf dem Gitterlevel  $k$  eine Teilmenge der größeren Zelle darstellen würde. Es ergibt sich, dass die Fehlerwerte auf dem feinen Gitterlevel  $J$  gebietsweise konstant über mehrere Zellen sind. Diese Gebiete konstanter Fehlerwerte entsprechen den agglomerierten Zellen des Gitterlevels  $k$ . Daraufhin werden die vorgesehenen Glättungsschritte auf dem Dualgitter der feinsten Triangulierung  $\mathcal{T}_J$  durchgeführt, jedoch nur auf den feinen Zellseitenflächen, die auch Teil der groben Zellseitenfläche sind. Der Fehler einer groben Gitterzelle  $C_i^{(k)}$  wird berechnet, indem alle Werte auf den Zellseitenflächen der feinen Gitterzellen  $C_j^{(J)}$ , die eine Teilmenge der groben Gitterzelle sind, aufsummiert werden. Dabei kürzen sich die Werte der Zellseitenflächen, die innerhalb der groben Zelle liegen, heraus. Es verbleibt die Summe der Werte der Zellseitenflächen der feinen Gitterzellen, die die Zellseitenfläche der groben Gitterzelle ergeben – daher müssen nur die Fehlerwerte auf den äußeren Zellseitenflächen berechnet werden. Dieses Verfahren ist laut [8] vorteilhaft gegenüber einer erneuten Diskretisierung des Gleichungssystems auf den agglomerierten Triangulierungen, da beispielsweise keine Randwerte zusammengefügt werden müssen. Am Ende findet die Restriktion der Werte auf die gröberen Zellen  $C_i^{(k)}$  mittels einer volumengewichteten Interpolation statt. Jede kleine Zelle  $C_j^{(J)}$  steuert, prozentual ihres Volumenanteils an dem Gesamtvolumen der Zelle  $C_i^{(k)}$ , auch ihren Wert zum Gesamtwert der groben Zelle  $C_i^{(k)}$  bei.





# 4 | Methodik

Das Vorhaben ist nun, unterschiedliche Lösungsalgorithmen zur Approximation der Lösung des inneren linearen Gleichungssystems (2.22) zu verwenden und zu vergleichen. Angewendet werden die Verfahren für zwei Testfälle, deren Gitterauflösungen des zu lösenden Problems variiert werden. Zudem sollen Parametervariationen im Hinblick auf die Laufzeit der linearen Lösungsalgorithmen durchgeführt werden. Der Fokus der Parametervariation liegt auf den Abbruchkriterien der linearen Lösungsalgorithmen.

Um die Abbruchkriterien erörtern zu können wird Abbildung 4.1 zu Rate gezogen. Es ist eine vereinfachende Übersicht des Ablaufs eines beispielhaften, linearen Lösungsalgorithmusses zu sehen. Seine Aufgabe besteht darin, iterativ die Lösung des inneren linearen Gleichungssystems aus Kapitel 2.7.1 zu approximieren und diese Information in den außen liegenden, nichtlinearen Lösungsalgorithmus einzuspeisen. Seine Bestandteile wurden in den vorangegangenen Kapiteln erörtert. Zunächst soll das Zusammenspiel der einzelnen Bestandteile erneut vereinfacht dargestellt werden, um im nächsten Schritt auf einzelne Abbruchkriterien näher eingehen zu können. Der äußerste Bestandteil ① der Abbildung 4.1 stellt das generalisierte Newton-Verfahren zum approximativen Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems eines diskretisierten Randwertproblems der RANS-Gleichungen dar. Wie in Kapitel 2.7 dargestellt wurde, kann ein Runge-Kutta-Verfahren verwendet werden, um den nichtlinearen Lösungsalgorithmus zu stabilisieren. In Abbildung 4.1 ist beispielhaft ein dreistufiges Runge-Kutta-Verfahren gewählt und mit ② betitelt. Innerhalb eines Runge-Kutta-Schrittes ergibt es sich, dass ein inneres, lineares Gleichungssystem, siehe Kapitel 2.7.1, approximativ gelöst werden muss. Es ist mit ③ innerhalb der Abbildung 4.1 beschriftet. Für das approximative Lösen des inneren linearen Gleichungssystems kann unter anderem ein einfaches, lineares Iterationsverfahren, beispielsweise ein Splitting-Verfahren aus Kapitel 3.1, verwendet werden. Eine andere Möglichkeit stellt ein lineares Mehrgitterverfahren dar, wie in Kapitel 3.2 eingeführt wurde. Dargestellt wird in Abbildung 4.1 die Verwendung eines linearen Mehrgitterverfahrens bei dem 2v-Mehrgitterzyklen angewendet werden, betitelt mit ④. Jeder der 2v-Mehrgitterzyklen beginnt mit Vorglättungsschritten auf dem feinsten Gitterlevel, gefolgt von einer Grobgitterkorrektur auf dem größten Gitterlevel, sowie Nachglättungsschritten erneut auf dem feinsten Gitterlevel. Die einfachen, linearen Iterationsverfahren, die an diesen Stellen innerhalb eines Mehrgitterzyklusses verwendet werden, sind ein Block-symmetrisches Linien-Gauß-Seidel-Verfahren sowie ein Block-symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren [4].

Da einzelne Schritte wie das Vorglätten, dem Namen nach, nur Glätter sind und nicht auskonvergieren, gilt es ein Abbruchkriterium zu definieren. Das Interesse liegt dabei darauf, die Fehlerterme auf dem jeweiligen Gitterlevel ausreichend zu glätten, jedoch nicht zu viel Rechenzeit in das einzelne Glätten zu investieren. Dabei ist davon auszugehen, dass der Fehlerterm mit dem geringsten Aufwand schon ausreichend geglättet wurde, wenn die niedrigste Laufzeit des approximativen, linearen Lösens eintritt. Innerhalb ④ stellt ① das Abbruchkriterium I) dar, dass die Anzahl an Gauß-Seidel-Schritten definiert, die beim Glätten sowie der Grobgitterkor-

rektur zugelassen werden. ② stellt das zweite Abbruchkriterium II) dar, das sich im linearen Mehrgitter ③ befindet. Abbruchkriterium II) definiert, um wie viele Größenordnungen das lineare Mehrgitterverfahren die Fehlerterme während eines Runge-Kutta-Schrittes reduzieren soll. Das letzte Abbruchkriterium III), das in diesem Zusammenhang erwähnt werden soll, wird am Ende ③ einer auskonvergierten Berechnung erreicht. Wenn das Residuum des approximativen Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems soweit verringert wurde, dass von einem auskonvergierten Verfahren gesprochen werden kann, ist die Berechnung erfolgreich beendet.

Es gibt somit ein Abbruchkriterium I) für das einfache, lineare Iterationsverfahren, dass als Glätter im linearen Mehrgitter fungiert, sowie ein Abbruchkriterium II) für das approximative Lösen des inneren, linearen Mehrgitters, als auch ein Abbruchkriterium III), das definiert wann das approximative Lösen des äußeren, nichtlinearen Gleichungssystem als auskonvergiert gilt.

## 4.1 | Parametervariation

Nachdem soeben einige Bestandteile des Lösungsalgorithmusses noch einmal in Zusammenhang gebracht wurden und die drei Abbruchkriterien eingeführt wurden, soll die Parametervariation näher erläutert werden. Im Folgenden werden sowohl Parameter als auch Faktoren und Komponenten des Lösungsalgorithmusses mit der Bezeichnung Parameter beschrieben, da sie im folgenden Zusammenhang Parameter der Untersuchungen darstellen.

### 4.1.1 | CFL-Zahl

Je größer die CFL-Zahl ist, desto wahrscheinlicher ist es im Allgemeinen, dass das Verfahren divergiert. Zu Beginn der Berechnung sind die Fehlerterme noch groß und die entsprechenden Werte eines vorherigen Iterationsschrittes, die in den darauf folgenden Iterationsschritt eingespeist werden, sind nur grobe Schätzungen. Folglich ist zu Beginn der Berechnung eine kleine CFL-Zahl ratsam, um das Verfahren zu stabilisieren. Ebenso wie die Fehlerterme bei einem konvergenten Verfahren zunehmend kleiner werden, kann die CFL Zahl erhöht werden, um die Konvergenzgeschwindigkeit mittels größerer Zeitschritte gegebenenfalls zu erhöhen. Die CFL-Zahl beginnt bei einem Wert von 10 und wird sukzessive bei jedem Iterationsschritt des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses um einen Faktor  $\gamma$  erhöht. Bis sie bei einem bestimmten, nichtlinearen Iterationsschritt einen finalen Wert von 1000 annimmt und beibehält. Solche hohen CFL-Zahlen sind möglich, da ein implizites Verfahren verwendet wird [4].

### 4.1.2 | Glätter im linearen Mehrgitter

Wie in vorangegangenen Kapiteln schon erwähnt, wird für das lineare Mehrgitterverfahren zum approximativen Lösen des inneren, linearen Gleichungssystems in den folgenden Untersuchungen ein Block-symmetrisches Linien-Gauß-Seidel-Verfahren sowie ein Block-symmetrisches Gauß-Seidel-Verfahren verwendet, siehe [4]. Der Unterschied dieser beiden Verfahren liegt darin, dass beim ersten Verfahren die Zusatzinformationen der Linien im Lösungsalgorithmus verwendet werden und sie beim zweiten Verfahren fehlen. So kann untersucht werden, ob eine Reduktion der Rechenzeit des linearen, approximativen Lösen mittels der Linieninformationen erzielt werden kann.

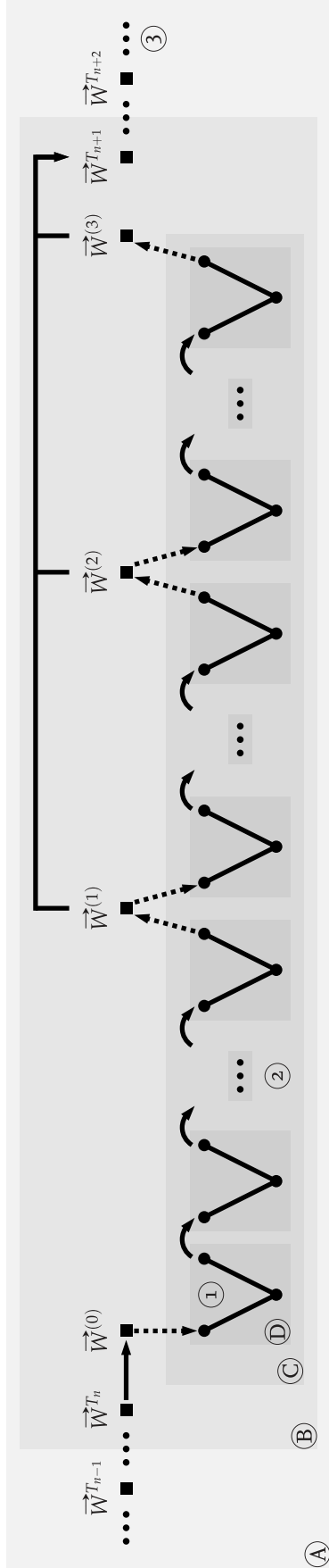


Abbildung 4.1: Zusammenspiel einiger, in vorangegangenen Kapiteln vorgestellter, Bestandteile des Lösungsalgorithmus:

- (A) : Äußeres, nichtlineares Iterationsverfahren zum approximativen Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems eines diskretisierten Randwertproblems der RANS-Gleichungen
- (B) : Dreistufiges Runge-Kutta-Verfahren zum Stabilisieren des äußeren, nichtlinearen Iterationsverfahrens
- (C) : Approximatives Lösen des inneren, linearen Gleichungssystems  $\text{Prec}_s \cdot \vec{h} = \vec{R}(\vec{W}^{(s-1)})$ ,  $\{s \in \mathbb{N} | 1 \leq s \leq 3\}$ , mittels eines linearen Mehrgitterverfahrens
- (D) : 2v-Mehrgitterzyklus zur Reduktion der Fehlerterme im linearen Mehrgitter
- ① : Abbruchkriterium I) des einfachen, linearen Iterationsverfahrens während des Vorglätzens, der Grobgitterkorrektur sowie dem Nachglätten innerhalb eines Mehrgitterzyklus
- ② : Abbruchkriterium II) der Abfolge von Mehrgitterzyklen des linearen Mehrgitters innerhalb eines Runge-Kutta-Schrittes
- ③ : Abbruchkriterium III) des approximativen Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems

### 4.1.3 | Mehrgitterzyklen

Als Mehrgitterzyklen des linearen Mehrgitters werden Standardzyklen verwendet. Die Mehrgitterzyklusvariation beinhaltet einen 2v-, 3v- bis hin zu einem 4v-Zyklus. Die maximale Gitterleveltiefe wird somit immer um ein Gitterlevel erhöht, wobei die Strategie eines v-Zyklusses beibehalten wird.

### 4.1.4 | Abbruchkriterien

Wird ein lineares Mehrgitter verwendet, dann wird das Abbruchkriterium I) in einem Spektrum von 80, 77, 75, 73, 70, ..., 10, 7, 6, 5, 4, 3, 2 bis 1 variiert. Somit wird untersucht, wie viele Gauß-Seidel-Schritte nötig sind, um die Fehlerterme mit möglichst geringem Aufwand ausreichend zu glätten. Jedoch gibt es einen vorzeitigen Abbruch im Abbruchkriterium I), wenn die Fehlerterme um so viele Größenordnungen verringert wurden, wie das Abbruchkriterium II) als Zahlenwert vorgibt. Damit soll verhindert werden, dass zu Beginn der Berechnung, bei einer kleinen CFL-Zahl, unnötig lange Iterationen durchgeführt werden. Für das Abbruchkriterium II) wird  $10^n$  mit  $n = -2, -3, -4$  gewählt. Auf diese Weise soll untersucht werden, wie sehr es sich lohnt, Rechenzeit in das approximative Lösen des inneren, linearen Gleichungssystem zu investieren. Ein zweites Kriterium im Abbruchkriterium II) ist, dass nicht mehr als 100 aufeinander folgende Mehrgitterzyklen pro Runge-Kutta-Schritt zugelassen werden. Das Abbruchkriterium III) wird konstant auf  $10^{-14}$  gehalten. Eine Verringerung des Abbruchkriteriums III) hätte eine längere Laufzeit zu Folge, wohingegen eine Vergrößerung eine kürzere Laufzeit bedingen würde. Bei einem Abbruchkriterium III) von  $10^{-14}$  ist davon auszugehen, dass die Fehlerterme soweit reduziert wurden, dass von einem konvergenten Verfahren sowie einem konvergierten Ergebnis auszugehen ist. Üblicher Weise werden in der CFD-Anwendung kleinere Größenordnungen für das Abbruchkriterium III) verwendet, sodass mit vergleichsweise langen Laufzeiten zu rechnen ist. Das zweite Kriterium in Abbruchkriterium III) sind maximal 10000 Iterationsschritte beim approximativen, nichtlinearen Lösungsalgorithmus. Es ist in einem solchen Fall von einer zu langsamen Parameterkombination auszugehen, die die Parametervariation lediglich aufhalten würde.

### 4.1.5 | Parameter des impliziten Runge-Kutta-Verfahrens

Das Runge-Kutta-Verfahren soll während der Parametervariationen möglichst auf ein Minimum von Komplexität reduziert werden, sodass der nichtlineare Lösungsalgorithmus lediglich minimal stabilisiert wird. Der Zweck dieses Rückschrittes soll sein, dass sich die Auswirkungen des linearen Mehrgitters besser hervorheben. Wie in Kapitel 2.7.1 erwähnt, strebt das vorgestellte Runge-Kutta-Verfahren gegen ein Newton-Verfahren, insofern die Stufenanzahl  $s$ , der Relaxationsparameter  $\varepsilon$  sowie die Faktoren  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{21}$  den Wert Eins annehmen. Zudem muss die CFL-Zahl gegen Unendlich streben. Als Wert der genannten Parameter  $s$ ,  $\varepsilon$  sowie  $\alpha_{11}$  und  $\alpha_{21}$  wird Eins gewählt. Ausschließlich die oben genannte Wahl der CFL-Zahl sorgt dafür, dass das Verfahren nicht genau einem Newton-Verfahren entspricht. Jedoch wird mit 1000 eine große CFL-Zahl gewählt und der nichtlineare Lösungsalgorithmus ist folglich ähnlich eines Newton-Verfahrens.

### 4.1.6 | Einige konstant gehaltene Parameter

Alle nicht hier genannten Parameter werden im Allgemeinen konstant gehalten, sodass sie keinen Einfluss auf die Laufzeituntersuchungen haben und lediglich die genannte Parameter-

variation untersucht wird. So wird beispielsweise der Anstieg der CFL-Zahl für alle Untersuchungen konstant gehalten, sowie der Entropie-Fix.

#### 4.1.7 | Referenz

Untersucht wird ein lineares Mehrgitterverfahren zum approximativen Lösen des inneren linearen Gleichungssystems anstelle eines einfachen, linearen Iterationsverfahrens. Als Vergleich wird daher der jeweilig verwendete Glätter alleine ohne ein lineares Mehrgitter verwendet. Die Parameterwahlen bleiben dabei die gleichen, abgesehen davon, dass es Abbruchkriterium I) nicht mehr gibt, da das einfache, lineare Iterationsverfahren nicht als Glätter im linearen Mehrgitterverfahren verwendet wird, sondern eine bestimmte Anzahl an Iterationen angewendet wird. Abbruchkriterium II) wird in diesem Fall nicht für die Aneinanderreihung von Mehrgitterzyklen verwendet, sondern es bestimmt wie lange das einfache, lineare Iterationsverfahren pro Runge-Kutta-Schritt angewendet wird. An Abbruchkriterium III) ändert sich nichts, weil das äußere nichtlineare Gleichungssystem weiterhin identisch gelöst wird. Was sich ändert ist, dass der nichtlineare Lösungsalgorithmus die approximierte Lösung des inneren, linearen Gleichungssystems von einem anderen linearen Löser bezieht. Demnach werden die Berechnungen voraussichtlich vergleichbar bleiben und bis zu einem identischen Maß auskonvergieren.

Betrachten wir erneut Abbildung 4.1, dann reduzieren sich ④ und ③ somit zu einem einfachen, linearen Iterationsverfahren. ② und ① bleiben unverändert. Abbruchkriterium II) bleibt identisch, wird jedoch für das lineare einfache Iterationsverfahren verwendet. Abbruchkriterium I) verschwindet komplett. Eine Abwandlung von Abbruchkriterium I) wird beim Abbruchkriterium II) ergänzt, sodass bei 250 Iterationsschritten des einfachen, linearen Iterationsverfahrens die innere Iteration abgebrochen wird, um mit der vorhandenen, approximierten, linearen Lösung den nächsten Runge-Kutta-Schritt einzuleiten. Diese Ergänzung des Abbruchkriteriums II) soll verhindern, dass, während geringer Konvergenzraten im linearen Lösungsverfahren, zu viel Rechenzeit in das Lösen des linearen Gleichungssystems investiert wird. Das äußere, nichtlineare Lösungsverfahren konvergiert zu dem Zeitpunkt gegebenenfalls noch schneller und das lineare Gleichungssystem muss gar nicht exakter, approximativ gelöst werden.

## 4.2 | Zeitmessung und Automatisierung der Variation zur Datengenerierung

Nachdem die zu variierenden Parameter und auch die Referenzmessungen diskutiert wurden, sollen im folgenden Abschnitt die wichtigsten Bestandteile, die die Durchführung der Untersuchungen ermöglicht haben, vorgestellt werden.

### Messung der Rechenzeit des approximativen, linearen Lösens

In dieser Arbeit steht das Lösen des inneren, linearen Gleichungssystems im Mittelpunkt. Es wird daher die Laufzeit gemessen, die der lineare Lösungsalgorithmus benötigt. Da dieser immer wieder stückweise verwendet wird, wird eine Zeitmessung um seinen Funktionsaufruf herum angewendet. Die Lösungsstrategien des linearen Lösungsalgorithmus variieren, sodass die Zeitmessung dementsprechend angepasst werden muss. Das lineare Mehrgitterverfahren wird für die Referenzmessungen abgeschaltet. Dabei ist darauf zu achten, dass unterschiedliche Stellen im Code zeitlich zu messen sind.

Die gesamte Rechenzeit des approximativen LöSENS des inneren, linearen Gleichungssystems ergibt sich aus der Summe der vielen Teilmessungen. Des Weiteren wird die Gesamtlaufzeit von Start bis Ende der Berechnung gemessen.

### Ein Wrapper zur Automatisierung

Für die beschriebenen, nichtlinearen sowie linearen Lösungsalgorithmen wird RK, ein interner Forschungscode des DLR, verwendet [4]. In ihm enthalten sind Bibliotheken für lineare Lösungsalgorithmen, die modular ausgewählt werden können. Die Einstellung oben genannter Parameter kann mittels einer Parameterdatei *para\_parallel* durchgeführt werden, die die Schnittstelle zum Nutzer darstellt. Die benötigten dualen Rechengitter werden in einem Präprozessorschritt, mittels des DLR-TAU Codes, für die Parallelisierung in mehrere Domains unterteilt. Die Lösung auf jeder der Domains wird jeweils durch einen Rechenkern berechnet und die Zwischenlösungen werden zwischen den Domains kommuniziert. Für die Einstellungen des Präprozessors gibt es ebenfalls eine Parameterdatei *para*. In *para* wird lediglich die Domainanzahl eingetragen, die durch die Anzahl an zu verwendenden Rechenkernen vorgegeben ist.

Zwei Testfälle mit einmal zwei und einmal einer Anfangsgitterauflösungen, zwei verschiedene Glätter im linearen Mehrgitterverfahren, drei verschiedene Mehrgitterzyklen, sowie 36 Variationen des Abbruchkriteriums I) und drei Varianten des Abbruchkriteriums II) werden miteinander kombiniert. Das ergibt alleine bei einmaliger Durchführung auf nur einer Maschine 1.944 einzelne Berechnungen die durchgeführt werden. Damit die Parameter nicht jedesmal einzeln per Hand eingegeben werden müssen, wird ein *Wrapper* in Python geschrieben, der die Parametervariation erleichtern, steuern und überwachen soll.

Schnittstelle zum eigentlichen Lösungsalgorithmus, der unter anderem in der Programmiersprache C formuliert ist, stellen die Parameterdateien dar. Der *Wrapper* besteht aus einer Klasse, die die zu variierenden Parameter als Vektorattribut trägt. Innerhalb mehrerer Schleifen werden alle vorgesehenen Kombinationen der verschiedenen Parametervariationen nacheinander als Berechnung durchgeführt. Die aufeinander abfolgenden Aufgaben des *Wrappers* sind als Methoden der Klasse definiert und werden in den Schleifen, die alle Einträge der Vektorattribute durchlaufen, aufeinanderfolgend und der Reihe nach ausgeführt.

Eine Variation beginnt zunächst damit, dass mit einem Minimum an vorherigen Angaben des Nutzers die Dateien der Testfälle sowie des Lösungsalgorithmus lokalisiert werden. Daraufhin beginnt die Erste der Varianten damit, dass die Anzahl an Domains in *para* eingetragen wird. Es werden eventuell vorhandene, alte Ausgabedateien des DLR-Tau-Präprozessors gelöscht, bevor dieser daraufhin mit dem ausgewählten Testfall und der gewählten Gitterauflösung gestartet wird. Nach erfolgreicher Ausführung des Vorkonditionierers werden eventuell vorhandene, alte Ausgabedateien von RK gelöscht. Die Variation der Parameter, wie beispielsweise das Abbruchkriterium I), der Glätter, die größte benötigte Triangulierung sowie der Mehrgitterzyklus werden in *para\_parallel* geschrieben. Für das Abbruchkriterium II) gibt es keine Schnittstelle in *para*, da jedoch der *Wrapper* die Parametervariation dirigieren soll und nicht ein Lösungsalgorithmus aus RK, werden die zu ändernden Funktionen des C-Codes eingelesen, entsprechend des Abbruchkriteriums II) bearbeitet und wieder als C-Code gespeichert. Gleiches wird mit den Funktionen, die den Output der Zeitmessung bestimmen, durchgeführt, sodass jeweils nur die Zeitmessung um das ausgewählte, lineare LöSEN aktiviert, und die Informationsausgabe dementsprechend angepasst wird. Die Dateien *flow\_solver\_parallel.c*,



*lapBlockSparseMatrix.c* und *multigrid\_cycle.c* werden neu kompiliert und danach wird die Berechnung mittels *mpirun* im ausgewählten Pfad auf der ausgewählten Anzahl an Rechenkernen parallelisiert gestartet. Nach erfolgreicher Beendigung der Berechnung wird der variationstypische Name für die Lösungs- und Ausgabedateien generiert. Dieser setzt sich zusammen aus der Nummer des Glätters in der Bibliothek, der Auflösung des feinsten Gitterlevels, der Tiefe des größten Gitterlevels, des Mehrgitterzyklusses des nichtlinearen Löser, des Mehrgitterzyklusses des linearen Mehrgitters, des Abbruchkriteriums I), des zweiten Kriteriums des Abbruchkriteriums II), sowie des eigentlichen Abbruchkriteriums II). Getrennt werden die einzelnen Zahlen im Namen durch Unterstriche. Angemerkt werden soll, dass das nichtlineare Mehrgitter ausschließlich im Einfachgittermodus betrieben wird, somit ausgeschaltet ist. Der Bestandteil dieses Parameters im Namen ist lediglich zur Kontrolle, ebenso wie das größte Gitterlevel sowie das zweite Kriterium des Abbruchkriteriums II), sodass Fehler vorgebeugt werden, die zu Beginn aufgetreten sind.

Im vorläufig letzten Schritt wird der individuelle Name nun dafür verwendet einen Ordner selben Namens zu erstellen. In den Ordner werden die Lösungsdateien, Laufzeitausgabedateien, Parameterdateien sowie die bearbeiteten C-Code-Dateien kopiert und erhalten dabei den zuvor erstellten Namen als Präfix. Die Vielzahl an Dateien, die kopiert werden, erlauben die Kontrolle der Parameterwahl und das Analysieren des Berechnungsverlaufs zu einem späteren Zeitpunkt.

Nachdem alle benötigten Dateien der beendeten Rechnung gespeichert wurden, kann im Anschluss der gleiche Durchlauf mit der nächsten Parameterwahl vollzogen werden, bis alle Variationen durchgeführt sind.

### 4.3 | Auswertemethoden

Die Basis der Auswertung stellen die Laufzeitausgabedateien dar. In ihnen sind die Informationen über den Ablauf einer Berechnung gespeichert, wie beispielsweise der Verlauf der Anzahl von Iterationsschritten im nichtlinearen Lösungsalgorithmus sowie der Verlauf der Anzahl von Iterationsschritten sowie die Rechenzeit des linearen Lösungsalgorithmus. Des Weiteren befinden sich der Verlauf des Residuums sowie die Anzahl an benötigten Gauß-Seidel-Schritten des linearen Mehrgitterverfahrens innerhalb der Laufzeitausgabedatei. Auch die Gesamtlaufzeit wird am Ende der Berechnung dort gespeichert.

Bei der Auswertung wird der Verlauf der betrachteten Größe während der Berechnung zunächst aus der Laufzeitausgabedatei ausgelesen und im Anschluss gegebenenfalls aufsummiert, insofern eine Gesamtgröße gefragt ist. Werden mehrere Variationen miteinander verglichen, dann wird der gesamte Satz von Laufzeitausgabedateien der Variationen eingelesen, in einer Matrix gespeichert und anschließend in einer Grafik oder Tabelle dargestellt.





# 5 | Testfälle und Ergebnisse

## 5.1 | Testfälle

Zwei zweidimensionale Testfälle werden untersucht, ein laminarer Testfall sowie ein turbulenter Testfall. Mittels der RANS-Gleichungen, der Testfälle sowie der gewählten Parameter wird ein Randwertproblem formuliert, diskretisiert und durch die beschriebenen Lösungsalgorithmen approximativ gelöst.

Tabelle 5.1: Übersicht der untersuchten Testfälle, Gittergrößen und ausgewählten Parameter

Profilgeometrie	NACA 0012		RAE 2822
Gittergröße	128 x 64	256 x 128	320 x 64
Anzahl an Punkten	8192	32768	20480
$CFL_{init}$	10		
$\gamma$	5		1,5
$CFL_{mean,max}$	1000		
$CFL_{turb,max}$	–		1000
Mehrgitterzyklen (mean, turb)	{sg, 2v, 3v, 4v}		{sg, 2v, 3v, 4v}, sg
Domainanzahl	4		
Abk. I)	{80, 77, 75, 73, 70, ..., 10, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1}		
Abk. II)	{ $10^{-2}$ , $10^{-3}$ , $10^{-4}$ }		
Abk. III)	$10^{-14}$		

### 5.1.1 | Laminarer Testfall NACA 0012

#### Strömungszustand

In dem ersten Testfall wird die laminare Strömung über einen 2D-Schnitt des Profils NACA 0012 untersucht. Die Anströmmachzahl beträgt  $Ma_\infty = 0,5$ , der Anstellwinkel beträgt  $\alpha = 0^\circ$  und die Reynoldszahl beträgt  $Re = 5000$ , bestimmt mittels der Profillehne.

#### Gittergrößen

Als Rechengitter wird ein C-Typ strukturiertes Gitter der Größe 128 x 64 sowie 256 x 128 verwendet, beschrieben in Tabelle 5.1. In Abbildung 5.4 ist beispielhaft das 128 x 64 Gitter zu sehen. Für eine detaillierte Beschreibung des Testfalls wird auf [4, 25] verwiesen. In [25] werden zudem zusätzliche Anstellwinkel untersucht bis hin zu einer Auflösung von 4096 x 2048. Experimentelle Daten können [26] entnommen werden.

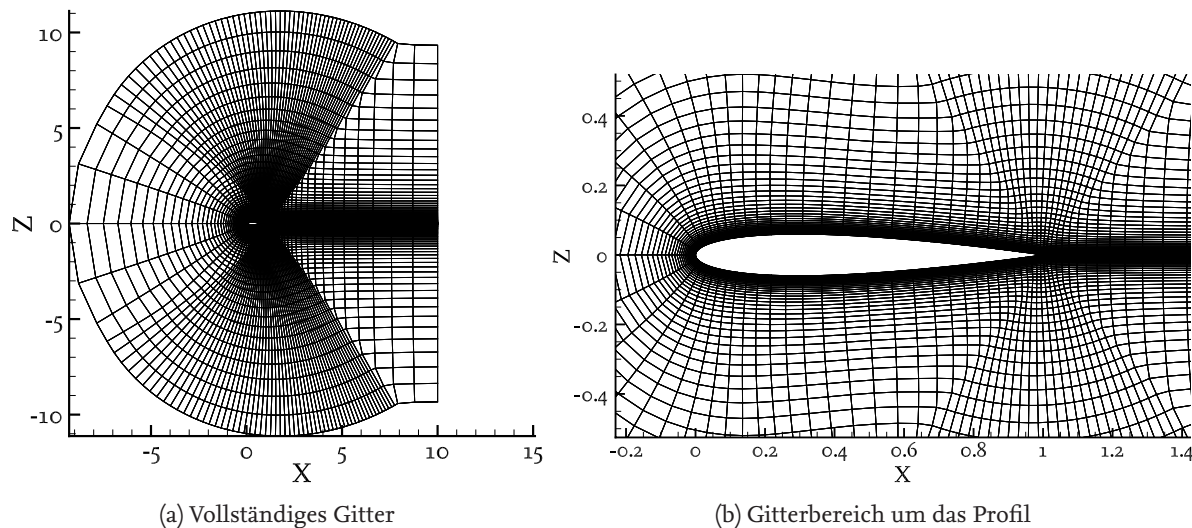


Abbildung 5.1: Beispielhafte Darstellungen des 128 x 64 Gitters für das NACA 0012 Profil

### 5.1.2 | Turbulenter Testfall RAE 2822

#### Strömungszustand

In dem zweiten Testfall wird die turbulente Strömung über einen 2D-Schnitt des Profils RAE 2822 untersucht. Die Anströmmachzahl beträgt  $Ma_\infty = 0.729$ , der Anstellwinkel beträgt  $\alpha = 2,79^\circ$  und die Reynoldszahl beträgt  $Re = 6500000$ , gebildet mit der Profilsehne. Die Turbulenz wird mittels eines SA-Modells modelliert.

#### Gittergrößen

Als Rechengitter wird ein C-Typ strukturiertes Gitter der Größe 320 x 64 verwendet, beschrieben in Tabelle 5.1. Für weiterführende Literatur bezüglich dieses Testfalls, siehe [4, 8]. Experimentelle Daten können [26] entnommen werden.

### 5.1.3 | Hardware Spezifikation

Die Berechnungen werden auf einer Linux Maschine durchgeführt. Der Prozessor ist ein Intel Xeon E3-1240 v2 von dem 4 Kerne verwendet werden und es sind 32 Gbyte RAM verbaut.

Des weiteren werden einige Rechnungen auf dem CASE Cluster des DLR berechnet. Auf sie wird kurz in Kapitel 6 eingegangen. Für die Berechnung auf dem Cluster wird ein Knoten mit 24 Kernen angefragt von dem 4, 12 sowie 24 Kerne verwendet werden.

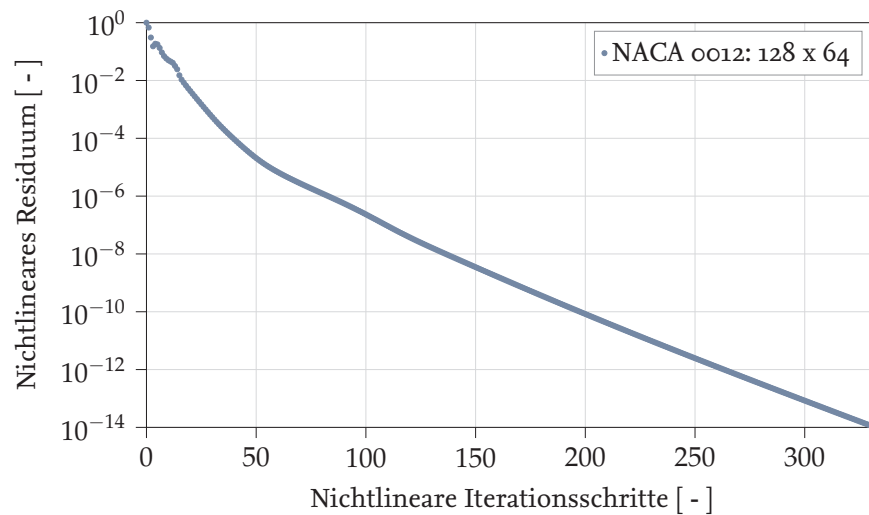


Abbildung 5.2: Auskonvergiertes Residuum des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses beim approximativen Lösen des laminaren NACA 0012 Testfalls auf einem 128 x 64 Rechengitter

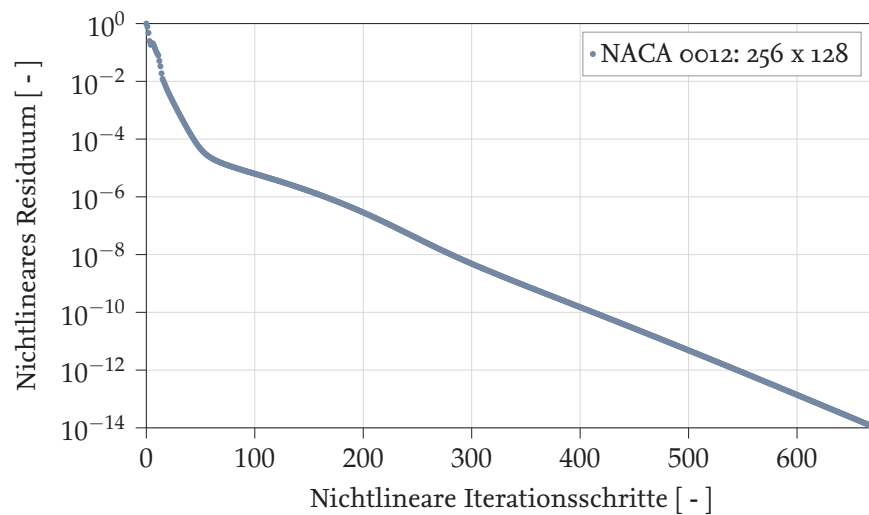


Abbildung 5.3: Auskonvergiertes Residuum des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses beim approximativen Lösen des laminaren NACA 0012 Testfalls auf einem 256 x 128 Rechengitter

### 5.1.4 | Nichtlineares Konvergenzverhalten

An dieser Stelle soll das Konvergenzverhalten des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses kurz dargestellt werden.

#### Nichtlineares Residuum

Die in den kommenden Abschnitten auskonvergierten Berechnungen besitzen untereinander das gleiche Konvergenzverhalten bezüglich der nichtlinearen Iterationsschritte, wenn sie das selbe Randwertproblem auf dem selben Gitter approximativ lösen. Auch die berechneten Lösungen der Strömungsgrößen stimmen miteinander überein. Die Laufzeit und linearen Iterationsschritte, mit der das innere lineare Gleichungssystem approximativ gelöst wird, variieren hingegen.

Es soll im folgenden das Konvergenzverhalten von auskonvergierten Rechnungen für die drei

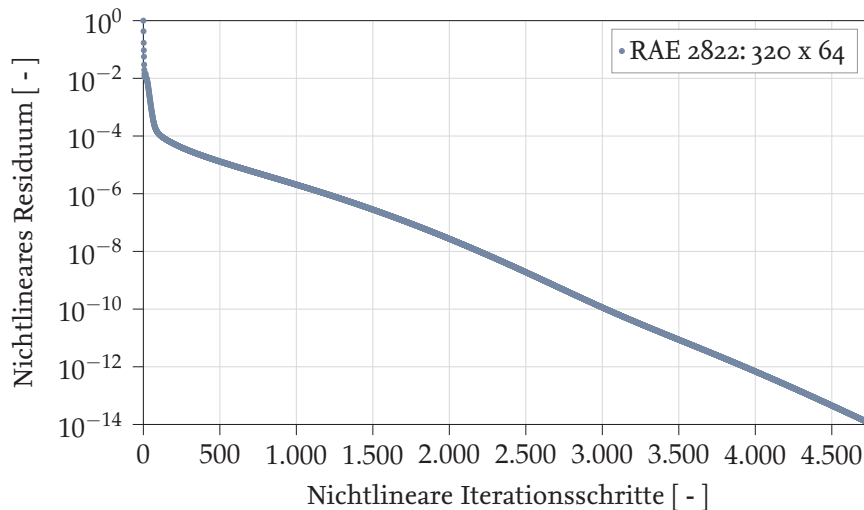


Abbildung 5.4: Auskonvergiertes Residuum des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses beim approximativen Lösen des turbulenten RAE 2822 Testfalls auf einem 320 x 128 Rechengitter

verschiedenen Randwertprobleme gezeigt werden. Dargestellt wird das nichtlineare Residuum über den nichtlinearen Iterationsschritten, in Abbildung 5.2 für den laminaren Testfall mit einem 128 x 64 Gitter, in Abbildung 5.3 für den laminaren Testfall NACA 0012 mit einem 256 x 128 Gitter und in Abbildung 5.4 für den turbulenten Testfall RAE 2822 mit einem 320 x 64 Gitter. Bei allen drei Abbildungen konvergiert das nichtlineare Residuum bis zu einem Wert minimal unter  $10^{-14}$ . Abgesehen von der Anfangsphase stellen die Verläufe annähernd eine Gerade, bei Auftragung auf einer logarithmischen Ordinate, dar.

## 5.2 | Ergebnisse

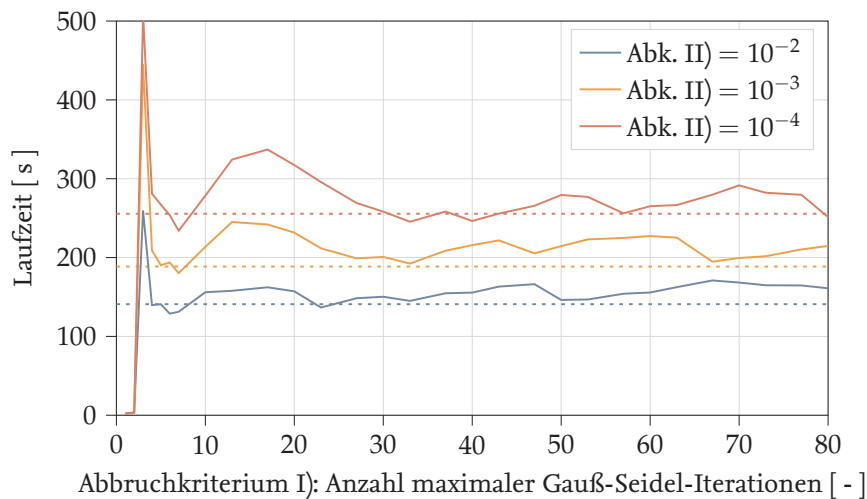
Der Fokus dieser Arbeit liegt nicht auf der Analyse der berechneten Strömungsgrößen, sondern auf der Untersuchung der Rechenlaufzeit. Es soll daher an dieser Stelle angemerkt werden, dass die berechneten Strömungsgrößen mit denen aus der Literatur vergleichbar sind. Für detaillierte Auswertungen berechneter Ergebnisse siehe [4, 8, 25].

Im Folgenden wird der qualitative Einfluss der Parametervariationen auf die Laufzeit der Lösungsalgorithmuskombinationen aus den Bibliotheken von *RK* untersucht. Es werden dabei diskretisierte Randwertprobleme der Navier-Stokes- und RANS-Gleichungen mittels der zuvor vorgestellten Lösungsalgorithmen approximativ gelöst.

Eine, die kommenden Abschnitte begleitende, Übersicht der schnellsten Laufzeiten ist in Tabelle 5.2 vorweggenommen. Es wird daher, bei der folgenden Vorstellung der Ergebnisse, auf die Nennung von konkreten Zahlenwerten im Text verzichtet und eine qualitative Darstellung der Ergebnisse bevorzugt.

Tabelle 5.2: Übersicht der Daten des jeweilig schnellsten Mehrgitterverfahrens und der schnellsten Referenzmessung für jede der Abbildungen in Kapitel 5.2.  
Das Abk. II) besitzt daher für alle Untersuchungen dieser Tabelle den Wert  $10^{-2}$ .

Profilgeometrie:	NACA 0012										RAE 2822			
	128 x 64					256 x 128					320 x 64			
	Abk. I)	nl. Iter.	lin. Iter.	Laufzeit [s]	Abk. I)	nl. Iter.	lin. Iter.	Laufzeit [s]	Abk. I)	nl. Iter.	lin. Iter.	Laufzeit [s]	Abk. I)	nl. Iter.
sg, ohne Linien	–	333	643	141	–	673	1339	1305	–	4766	13446	5108	–	4766
2v, ohne Linien	6	333	4186	128	13	673	6083	1803	6	4767	63753	5988	6	4767
3v, ohne Linien	10	333	1811	99	60	673	1359	1964	47	4766	9318	7890	47	4766
4v, ohne Linien	7	333	2075	84	60	673	1358	2007	–	–	–	–	–	–
sg, mit Linien	–	333	641	65	–	673	1337	789	–	4766	13418	3794	–	4766
2v, mit Linien	43	333	333	47	67	673	680	700	4	4766	38697	3221	4	4766
3v, mit Linien	17	333	383	44	33	673	784	794	13	4766	10021	2760	13	4766
4v, mit Linien	17	333	383	43	33	673	780	792	10	4766	11148	2725	10	4766



Abbildungung 5.5: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem  $128 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

### 5.2.1 | Ergebnisse: Laminarer 2D Testfall NACA 0012

Als erstes werden die Ergebnisse der Untersuchungen vorgestellt, die sich mit der symmetrischen, laminaren Umströmung des NACA 0012 Profils befassen haben.

#### 5.2.1.1 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 2v-Mehrgitterzyklus mit $128 \times 64$ Startgitter

Die Laufzeit der Berechnung wird von der Auswertemethode bestimmt und im Diagramm auf der Ordinate aufgetragen, beispielsweise in Abbildung 5,5 zu sehen. Über die Abszisse wird das Abbruchkriterium I) variiert, also die Anzahl maximal zugelassener Glättungsschritte im linearen Mehrgitterverfahren beim Vorglätten, der Grobgitterkorrektur sowie dem Nachglätten. Beim Glätten, der in den Untersuchungen dieser Arbeit verwendet wird, handelt es sich um die maximal zugelassenen Block-symmetrischen-Linien-Gauß-Seidel-Iterationen oder Block-symmetrischen-Gauß-Seidel-Iterationen. Diese langen Bezeichnungen werden in den kommenden Kapiteln mit den Abkürzungen Linien-GS-Iterationen, GS-Iterationen oder, dort wo eine Unterscheidung nicht notwendig ist, mit dem Begriff Glättungsschritten betitelt.

Zunächst wird der oben beschriebene, laminare, zweidimensionale Testfall des umströmten NACA 0012 Profils untersucht. Die Gitterdimensionen betragen  $128 \times 64$ , als Glätter im linearen Mehrgitterverfahren werden GS-Iterationen verwendet und es handelt sich um 2v-Mehrgitterzyklen. Der Verlauf der Laufzeit der Berechnung über die Variation der zugelassenen Glättungsschritte ist in Abbildung 5,5 aufgetragen. Zusätzlich zu Abk. I) (Abbruchkriterium)) wird auch das Abk. II) variiert, also bei welchem Wert des linearen Residuums die Abfolge von Mehrgitterzyklen abgebrochen wird. Es ergeben sich daher in Abbildung 5,5 drei Graphen mit durchgezogenen Linien.

Die drei horizontalen, gepunkteten Linien stellen die Laufzeiten der Referenzmessungen dar, die ohne lineares Mehrgitterverfahren jedoch mit den gleichen, weiteren Parametern der Parametervariation durchgeführt werden. Angemerkt sei, dass sie losgelöst von der Abszisse sind und keinerlei Bezug zum Abk. I) besitzen. Ihre Darstellung dient der Diskussion der Wirkungs-

weise des linearen Mehrgitterverfahrens.

Wird nun der Verlauf der Graphen genauer betrachtet, dann beginnen diese mit einem steilen Anstieg der Laufzeit, gefolgt von einer steilen Verringerung der Laufzeit. Diese Laufzeiten vor dem ersten, schmalen Maximum, auf der linken Seite der Abbildung, gehören zu Berechnungen deren nichtlineares Residuum nicht bis  $10^{-14}$  auskonvergiert ist. Es sind Laufzeiten, die im Einzelnen nicht weiter betrachtet werden und die der Untersuchung nicht angehören, da ihre Berechnungen vorzeitig abgebrochen sind. Sie sind dennoch dargestellt, da sie eine Information darüber liefern, bei welchem minimalen Wert der zugelassenen Glättungsschritte ein Verfahren, der betrachteten Parametervariation, das erste Mal auskonvergiert.

Nach besagtem, schmalen Maximum der Laufzeit ist eine Verringerung der Laufzeit auf ein globales Minimum bei ca. 7 GS-Iterationen zu beobachten. Dieses befindet sich, für alle Varianten des Abk. II), minimal unter der Laufzeit der jeweiligen Referenzmessung. Bei den Referenzmessungen ist die Berechnung mit dem größten Abk. II), also  $10^{-2}$ , die Berechnung mit der geringsten Laufzeit. Je niedriger das Abk. II) gewählt wird, desto langsamer sind nicht nur die Referenzmessungen, sondern auch die Laufzeitmessungen der Mehrgitterverfahren für die Parametervariationen. Die Laufzeitverläufe der Graphen mit den Werten  $10^{-3}$  und  $10^{-4}$  für das Abk. II) sind bezogen auf den Graphen mit dem Wert  $10^{-2}$ , für Abk. II), näherungsweise parallel zu langsameren Laufzeiten verschoben.

Nach dem beschriebenen globalen Minimum folgt ein Laufzeitanstieg auf ein lokales Maximum. Das Maximum in der Laufzeit ist bei abnehmenden Abk. II) stärker ausgeprägt und für Abk. II) =  $10^{-2}$  kaum vorhanden. Darauf folgend nimmt die Laufzeit wieder auf Werte in dem Bereich der Referenzmessungen ab. Ab GS-Iterationen von ca. 33 bleiben die Laufzeiten der drei Graphen vorwiegend oberhalb der Referenzlaufzeiten.

Zusammenfassend ist in Abbildung 5.5 zu beobachten, dass

1. die Berechnungen bei zu kleinen Begrenzungen der GS-Iterationen vorzeitig abbrechen,
2. die Laufzeit für einen Wert  $10^{-2}$  für das Abk. II) am geringsten ist,
3. die Laufzeit für abnehmende Abk. II) zunimmt,
4. die Laufzeitverläufe für ein variierendes Abk. II) annähernd parallel verschoben sind,
5. ein Minimum der Laufzeit bei 6 bis 7 GS-Iterationen besteht,
6. die Laufzeit bei 13 bis 20 GS-Iterationen erhöht ist,
7. die Laufzeit für stark zunehmende, maximal zugelassene GS-Iterationen geringfügig größer ist, als für die Referenzmessungen und
8. das Mehrgitterverfahren für einen großen Bereich der GS-Iterationen geringfügig langsamer ist, als die Referenzmessungen.

#### **5.2.1.2 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 3v-Mehrgitterzyklus mit 128 x 64 Startgitter**

Erneut wird die gemessene Laufzeit aufgetragen über die Parametervariation in Abbildung 5.6 betrachtet, jedoch bei der Verwendung eines 3v-Mehrgitterzyklusses. Die restlichen Parameter und Variationen bleiben identisch zu Abbildung 5.5 aus Abschnitt 5.2.1.1.

Der Verlauf der drei Graphen beginnt erneut mit einem schmalen Maximum der Laufzeit bei kleinen GS-Iterationen. Rechts daneben, für einen Bereich der Anzahlen der GS-Iterationen

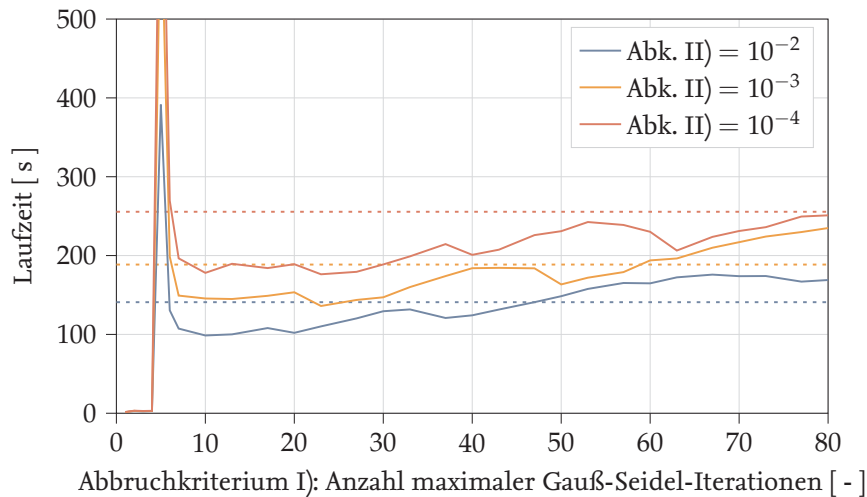


Abbildung 5.6: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem  $128 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

von 7 bis 30, hat sich eine breite Senke in der Laufzeit der Mehrgitterverfahren ausgebildet. Bis hin zu hohen Werten der GS-Iterationen liegen die drei Graphen unter denen der Referenzmessungen. Entsprechend der 2. Beobachtung des vorangegangenen Abschnitts ist die schnellste Laufzeit mit  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  erreicht. Die Referenzmessung für  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  wird lediglich von dem linearen Mehrgitterverfahren mit  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  bezüglich der Laufzeit unterboten. Für eine zunehmende Anzahl an GS-Iterationen weisen alle drei Graphen ansteigende Laufzeiten auf. Ab 47 Schritten pro GS-Iteration ist das schnellste Mehrgitterverfahren wieder langsamer als die Referenzmessungen. Betrachtet man ein abnehmendes  $\text{Abk. II})$ , dann liegen die Laufzeiten erneut annähernd parallel zu größeren Werten verschoben, siehe Beobachtungen 2. bis 4. des vorangegangenen Abschnitts. Gleichzeitig ist der absolute Gewinn durch ein Mehrgitterverfahren gegenüber den Referenzmessungen stärker ausgeprägt, sodass die drei Graphen dichter beieinander liegen.

Für Abbildung 5.6 lässt sich letztendlich beobachten, dass

1. die 1. bis 4. Beobachtung der Abb. 5.5 bei Abb. 5.6 erneut auftreten,
2. die Laufzeit des Mehrgitterverfahrens mit einem  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  in einem Bereich von 6 bis 30 GS-Iterationen bei ausgeprägt niedrigeren Laufzeiten im Vergleich zur schnellsten Referenzmessung liegt,
3. die Laufzeit bei 7 bis 23 GS-Iterationen mittels Mehrgitterverfahren und einer  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  um ca.  $\frac{2}{7}$  gegenüber der schnellsten Referenzmessung verringert werden kann,
4. bei einer zunehmenden Anzahl an GS-Iterationen pro linearen Glättungsschritt steigt die Laufzeit im Mittel an und
5. der absolute Laufzeitgewinn durch Verwendung eines Mehrgitterverfahrens ist bei einem niedrigeren  $\text{Abk. II})$  höher, sodass die Laufzeitverläufe vertikal dichter zusammen liegen.



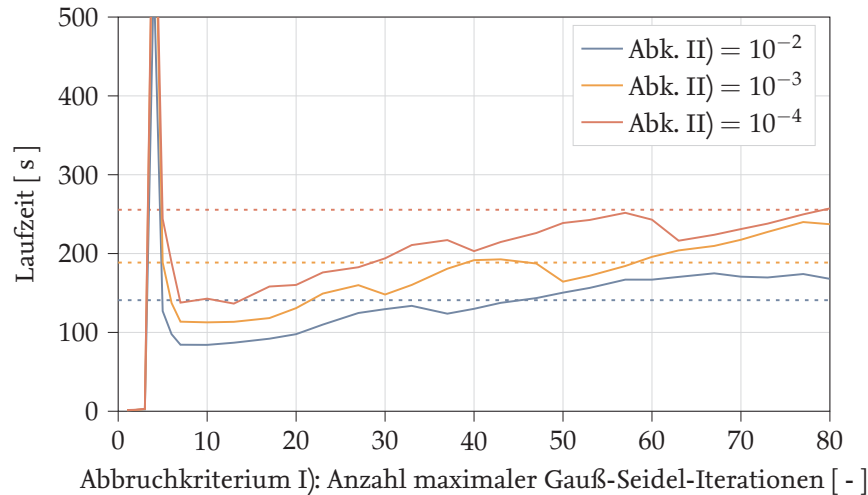


Abbildung 5.7: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

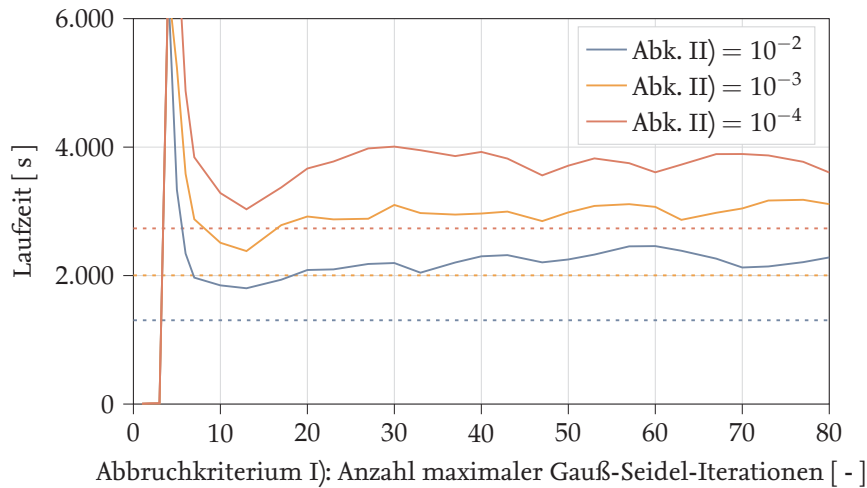
### 5.2.1.3 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 4v-Mehrgitterzyklus mit 128 x 64 Startgitter

In Abbildung 5.7 ist die gemessene Laufzeit über die Parametervariationen aufgetragen. Die Parametervariation ist abgesehen von der Verwendung eines 4v-Mehrgitterzyklusses identisch zu denen der Abbildungen 5.5 und 5.6 in den Abschnitten 5.2.1.1 und 5.2.1.2.

Vergleicht man Abbildung 5.7 mit 5.6, dann sind die Änderungen, die ein 4v-Mehrgitterzyklus gegenüber eines 3v-Mehrgitterzyklusses mit sich bringt, marginal. Bei Glättungsschritten oberhalb von 23 ist bei allen drei Graphen kaum ein Unterschied auszumachen. Die Senke in der Laufzeit für GS-Iterationsschritte von 7 bis 30 ist jedoch bei allen drei Graphen deutlich stärker ausgeprägt. Wie auch schon bei der 5. Beobachtung bezüglich Abbildung 5.6 angemerkt, liegen die Laufzeitverläufe vertikal noch dichter aneinander. Bei einem 4v-Mehrgitterzyklus sind nun auch Mehrgitterverfahren mit einem  $\text{Abk. II}) = 10^{-3}$  in einem Bereich von 6 bis 20 Iterationen schneller, als die schnellste Referenzmessung. Die kürzesten Laufzeiten werden weiterhin von Mehrgitterverfahren mit einem  $\text{Abk. II})$  von  $10^{-2}$  erreicht. Beobachtungen die in Abbildung 5.7 gemacht werden können sind, dass

1. die 1. bis 4. Beobachtung der Abb. 5.5 bei Abb. 5.7 erneut auftreten,
2. die 2. Beobachtung der Abb. 5.6 bei Abb. 5.7 erneut auftritt,
3. die Laufzeit bei 7 bis 23 GS-Iterationen mittels Mehrgitterverfahren und einer  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  um ca.  $\frac{3}{7}$  gegenüber der schnellsten Referenzmessung verringert werden kann und
4. die 4. und 5. Beobachtung der Abb. 5.6 bei Abb. 5.7 erneut auftreten.

Insofern werden viele der vorherigen Beobachtungen wieder aufgegriffen und es ergeben sich aus den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7 zudem einige Trends für die Variation der Mehrgitterzyklen. Der bei 2v-Mehrgitterzyklen auftretende, erneute Anstieg der Laufzeit, bei GS-Iterationsanzahlen von 10 bis 20, wird durch tiefer reichende v-Zyklen geglättet und verschwindet für



Abbildungung 5.8: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem  $256 \times 128$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

einen 4v-Mehrgitterzyklus komplett. Der Effekt, dass sich der absolute Zeitgewinn durch die Verwendung eines linearen Mehrgitters bei niedrigeren Abbruchkriterien II) stärker äußert, ist bei tieferen v-Zyklen ausgeprägter. Das führt dazu, dass die Laufzeitverläufe bei tieferen v-Zyklen, im Bereich des Minimums, vertikal im absoluten Laufzeitverhalten immer dichter beieinander liegen.

#### 5.2.1.4 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 2v-Mehrgitterzyklus mit $256 \times 128$ Startgitter

In den drei kommenden Abschnitten sollen die gleichen Untersuchungen gemacht werden, wie in den Abbildungen 5.5, 5.6 und 5.7, jedoch mit geänderter Auflösung des Startgitters. Die Auflösung des Startgitters wird von  $128 \times 64$  auf  $256 \times 128$  erhöht. Der Testfall bleibt die laminare Umströmung des 2D NACA 0012 Profils. Der Glätter im linearen Mehrgitterverfahren bleibt ein Block-symmetrisches-Gauß-Seidel-Verfahren und es werden erneut ein 2v-, 3v- und 4v-Mehrgitterzyklus untersucht.

Beginnend mit den Zeitverläufen, die sich bei der Verwendung eines 2v-Mehrgitterzyklusses ergeben, entsteht Abbildung 5.8. Bezüglich der absoluten Laufzeitwerte liegen die Referenzmessungen in Abbildung 5.8 um ca. das 10fache höher als in Abbildung 5.5. Die Abfolge von charakteristischen Merkmalen im Verlauf der Laufzeiten entspricht hingegen etwa denen aus Abbildung 5.5. Ein schmales Maximum, auf das ein Minimum folgt, woraufhin die Laufzeit wieder ansteigt und sich dann nur noch geringfügig ändert. Anzumerken ist, dass das Minimum im Bereich von 7 bis 20 GS-Iterationen liegt und somit in Abbildung 5.8 erheblich breiter ist, als in Abbildung 5.5. Infolgedessen liegt der folgende Laufzeitanstieg bei größeren Werten des Abk. I), also bei größeren Werten der GS-Iterationsanzahlen, und steigt zudem relativ gesehen flach an.

Ein gravierender Unterschied der drei Laufzeitverläufe in 5.8 im Vergleich zu denen in Abbildung 5.5 ist, dass sie erheblich oberhalb der Referenzmessungen liegen. Selbst im Bereich des Minimums sind die Mehrgitterverfahren langsamer. Weiterhin führt eine Änderung in der Abk. II) zu einem annähernd parallel verschobenen Graphen und ein größeres Abk. II) zu kür-

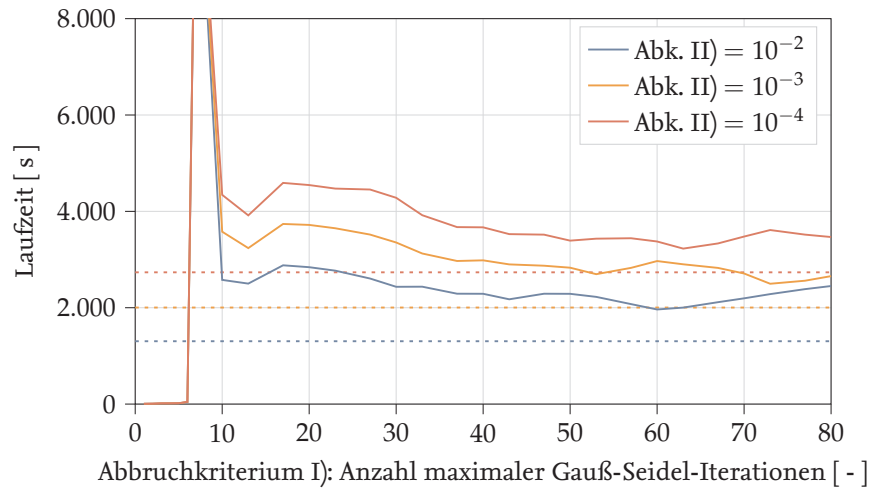


Abbildung 5.9: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

zeren Laufzeiten, sowohl bei den Referenzmessungen als auch den Mehrgitterverfahren. Für große Anzahlen der GS-Iterationen ändert sich die Laufzeit kaum und ist weiterhin erheblich höher als die Referenzmessungen. Werden die ersten Beobachtungen bezüglich eines feineren Startgitters für Abbildung 5.8 zusammengefasst, ergibt sich, dass

1. die 1. bis 4. Beobachtung der Abb. 5.5 bei Abb. 5.8 wie auch bei Abb. 5.7 erneut auftreten,
3. das Minimum der Mehrgitterverfahrenlaufzeit bei  $\text{Abk. I}) = 13$  für alle  $\text{Abk. II})$  auftritt,
2. die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren des 256 x 128 Startgitters bei Abb. 5.8 im Mittel ca. 20fach höher liegen als in Abb. 5.5 beim 128 x 64 Startgitter,
3. der Laufzeitverlauf ähnlich des Verlaufs in Abb. 5.5 ist, jedoch
4. die Laufzeiten des Mehrgitterverfahrens für das feinere Startgitter immer schlechter sind als die Referenzmessungen.

#### 5.2.1.5 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 3v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter

Für die Untersuchungen, die Abbildung 5.9 ergeben, wird im Vergleich zu den Untersuchungen in Abschnitt 5.2.1.4, ausschließlich der 2v-Mehrgitterzyklus durch einen 3v-Mehrgitterzyklus ersetzt.

In Abbildung 5.9 konvergieren die ersten Berechnungen erst bei ca. 10 GS-Iterationen pro Glättung. Es gibt eine kleine Senke im Bereich von 13 GS-Iterationen, gefolgt von einem niedrigen, aber breiten Maximum in der Laufzeit. Dieser Anstieg erfolgt im Vergleich zu Abbildung 5.8 bei kleineren  $\text{Abk. I})$  und ist relativ gesehen kleiner. Die Laufzeiten der beiden genannten Bereiche liegt erheblich höher, als noch zuvor bei einem 2v-Mehrgitterzyklus. Abgesehen von den Laufzeiten für GS-Iterationen größer 40 liegen die Laufzeiten höher und sinken für große GS-Iterationsanzahlen auf ähnliche Werte im Vergleich zu Abbildung 5.8. Die wesentlichen Erkenntnisse durch Abbildung 5.9 sind, dass

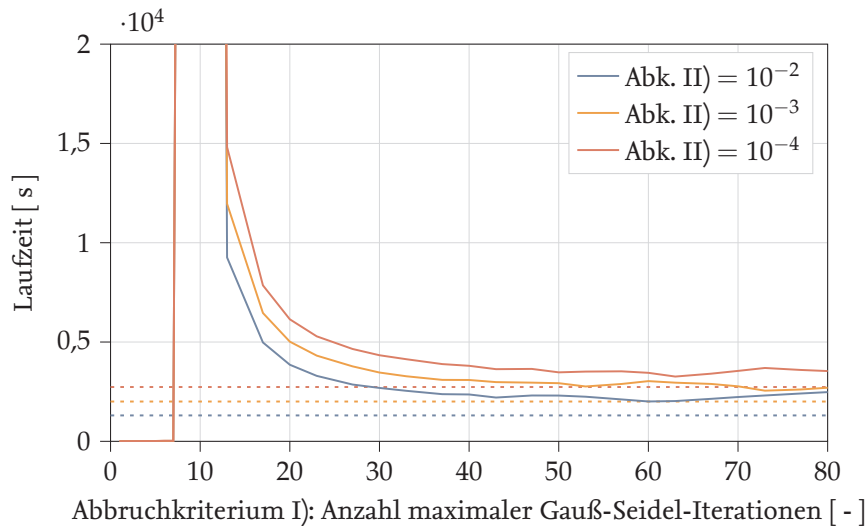


Abbildung 5.10: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

1. die 1. bis 4. Beobachtung der Abb. 5.5 bei Abb. 5.9 erneut auftreten,
2. die Laufzeiten der Messungen des 256 x 128 Startgitters bei Abb. 5.9 ca. 20fach höher liegen als in Abb. 5.6 beim 128 x 64 Startgitter,
3. der Laufzeitverlauf ähnlich des Verlaufs in Abb. 5.5 ist,
4. die 4. Beobachtung der Abb. 5.8 bei Abb. 5.9 erneut auftritt und
5. die ersten Berechnungen erst bei GS-Iterationsanzahlen von 10 auskonvergieren.

#### 5.2.1.6 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 4v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter

Diskutierend wird nun ein 4v-Mehrgitterverfahren für die selben Variationen der zwei vorangegangenen Abschnitte 5.2.1.4 und 5.2.1.5, in Abbildung 5.10 betrachtet.

Die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren liegen bis zum Faktor 2 über denen der Referenzmessungen. Zudem konvergieren erst bei Verwendung von 13 Glättungsschritten die ersten Verfahren aus. Für zunehmende GS-Iterationsschritte nehmen die Laufzeiten ab und bleiben ab 40 annähernd konstant. Es gilt für Abbildung 5.10, dass

1. die 1. bis 4. Beobachtung der Abb. 5.5 bei Abb. 5.10 erneut auftreten,
2. die Laufzeiten der Abbildung 5.10, bei GS-Iterationsanzahlen bis 20, gravierend langsamer sind, als die Referenzmessungen und
3. die ersten Berechnungen erst bei GS-Iterationsanzahlen von 13 auskonvergieren.

Auch bei zunehmend tieferen v-Zyklen wird die Laufzeit, insbesondere bei wenigen GS-Iterationen pro Glättung, erheblich langsamer.

Vergleicht man die beiden Startgitter, dann ist ein gegenläufiges Verhalten der Laufzeit zu beobachten. Bei dem gröberen 128 x 64 Startgitter können Mehrgitterverfahren bei richtiger Parameterwahl zu einem gravierenden Laufzeitgewinn führen. Bei dem feineren 256 x 128 Startgitter führen die verwendeten Mehrgitter zu keinem Laufzeitgewinn, sondern zu erheblichen

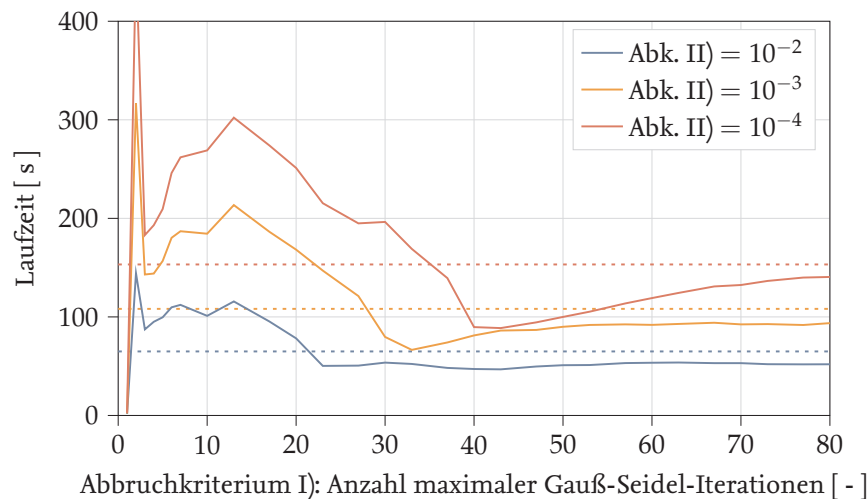


Abbildung 5.11: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem  $128 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

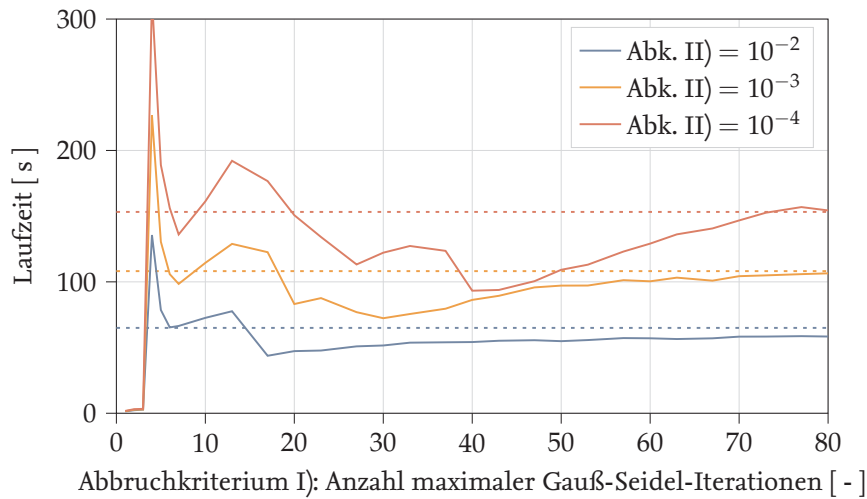
Verschlechterungen der Laufzeit. Insbesondere eine Parameterwahl wie beispielsweise geringe GS-Iterationen pro Glättung, die man für das  $128 \times 64$  Startgitter empfehlen könnte, könnten beim feineren  $256 \times 128$  Startgitter zu erheblichen Verschlechterungen der Laufzeit führen.

#### 5.2.1.7 | Block-symmetrischer-Linien-Gauß-Seidel-Glätter im 2v, 3v und 4v-Mehrgitterzyklus mit $128 \times 256$ Startgitter

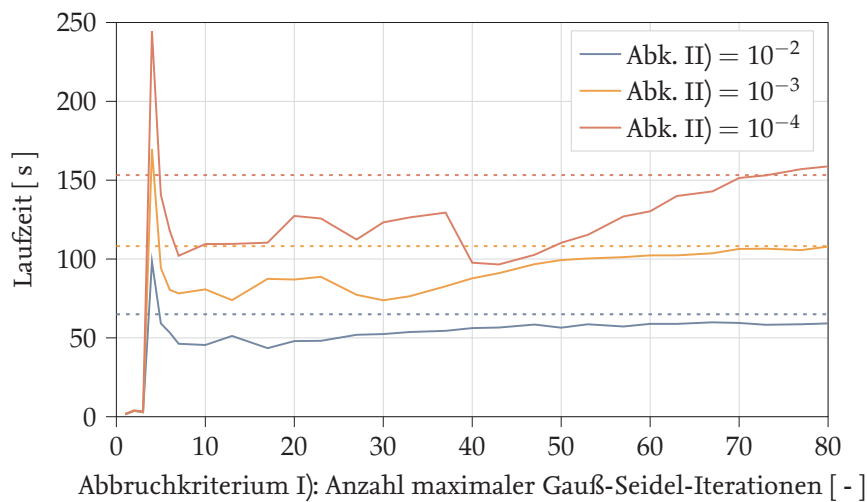
Es soll angemerkt werden, dass für alle noch folgenden Untersuchungen die 1. bis 4. Beobachtung der Abbildung 5.5 zutreffen werden. Sie werden daher bei den folgenden Diskussionen nicht explizit genannt. Untersucht werden nun die gleichen Sechs Varianten wie in den vorherigen sechs Abschnitten 5.2.1.1 bis 5.2.1.6, jedoch werden die Linieninformationen im Glätter des linearen Mehrgitters verwendet. Hauptaugenmerk soll somit auf wesentlichen Unterschieden liegen, die durch Verwenden der Linieninformationen entstehen.

Es wird wieder mit einem  $128 \times 256$  Startgitter begonnen. Für die Untersuchungen der Abbildung 5.11 wird ein 2v-Mehrgitterzyklus verwendet. Für die Untersuchungen der Abbildung 5.12 wird ein 3v-Mehrgitterzyklus und für die Untersuchungen der Abbildung 5.13 wird ein 4v-Mehrgitterzyklus verwendet. Zunächst lässt sich bemerken, dass alle drei Referenzmessungen fast doppelt so schnell sind, wenn Linieninformationen verwendet werden. Bemerkenswert ist, dass die ersten Berechnungen schon bei niedrigen Abbruchkriterien I) auskonvergieren. Zudem ist in allen drei Abbildungen für die Mehrgitterverfahren ein lokales Minimum der Laufzeit bei geringen Werten für das Abk. I), also wenige Linien-GS-Iterationen pro Glättung, ausgebildet. In Abbildung 5.11 und 5.12 befindet sich dieses Minimum meist noch oberhalb der Referenzmessungen.

Erst nach dem Anstieg der Laufzeit, mit einem Maximum bei ca. 13 Linien-GS-Iterationen, fallen die Laufzeiten bei den zwei Abbildungen 5.11 und 5.12 wesentlich unterhalb die Referenzmessungen. Bei Abbildung 5.13 liegt schon das anfängliche Minimum, bei niedrigen Anzahlen der Linien-GS-Iterationen, erheblich unterhalb der Referenzmessungen. Der erneute Laufzeitanstieg, bei niedrigen Werten für das Abk. I), ist für einen tieferen v-Zyklus in Abbil-



Abbildungung 5.12: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem  $128 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.



Abbildungung 5.13: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem  $128 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

Abbildungung 5.12 gegenüber Abbildung 5.11 weniger stark ausgeprägt. In Abbildung 5.13 tritt ein solcher Anstieg kaum mehr merkbar auf. Das führt dazu, dass die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren mit 4v-Mehrgitterzyklus und  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  fast über den gesamten betrachteten Bereich der Variation von Abk. I) schneller sind, als die schnellste Referenzmessung. Gleiches trifft für die Mehrgitterverfahren bei 2v- und 3v-Mehrgitterzyklus mit  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  zu, ab einem Abk. I) von 23 respektive 17.

Je kleiner das  $\text{Abk. II})$  ist, desto schneller tendieren die Laufzeiten in den drei Abbildungen 5.11, 5.12 und 5.13, für zunehmende Linien-GS-Iterationen, zu höheren Werten. Die wesentlichen Beobachtungen bei den Abbildungen 5.11, 5.12 und 5.13 für die Hinzunahme von Linieninfor-

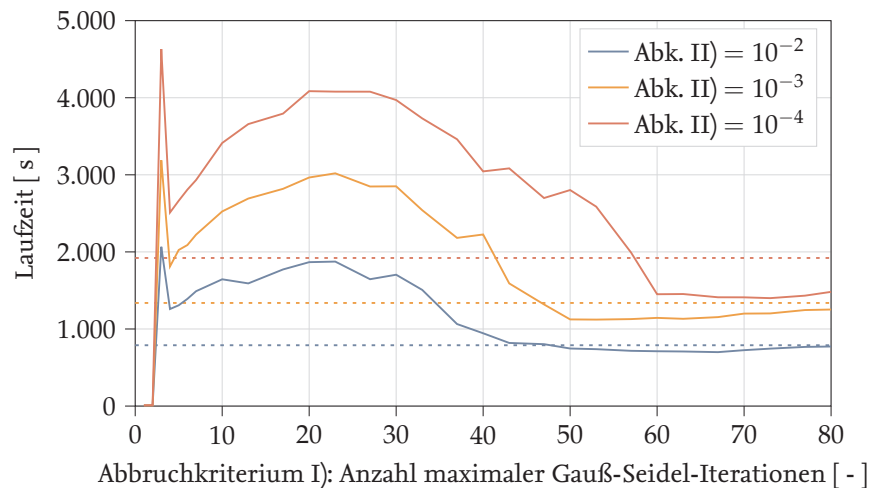


Abbildung 5.14: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

mationen sind, dass

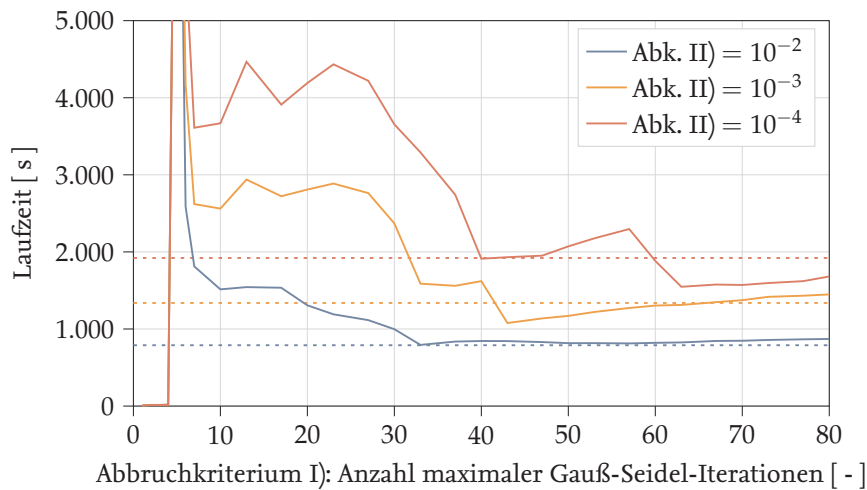
1. die Laufzeiten der Referenzmessungen nahezu doppelt so schnell sind,
2. die ersten Berechnungen schon bei niedrigen Abbruchkriterien I) auskonvergieren,
3. die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren mit  $\text{Abk. II} = 10^{-2}$  für einen weiten Bereich der Variation von Abk. I) schneller sind, als die schnellste Referenzmessung,
4. für tiefere v-Zyklen die Mehrgitterverfahren, bei einem Abk. I) von 7 bis 33, zunehmend schneller sind und
5. für tiefere v-Zyklen die Mehrgitterverfahren, bei einem Abk. I) größer 40, geringfügig langsamer sind.

#### 5.2.1.8 | Block-symmetrischer-Linien-Gauß-Seidel-Glätter im 2v, 3v und 4v-Mehrgitterzyklus mit 256 x 128 Startgitter

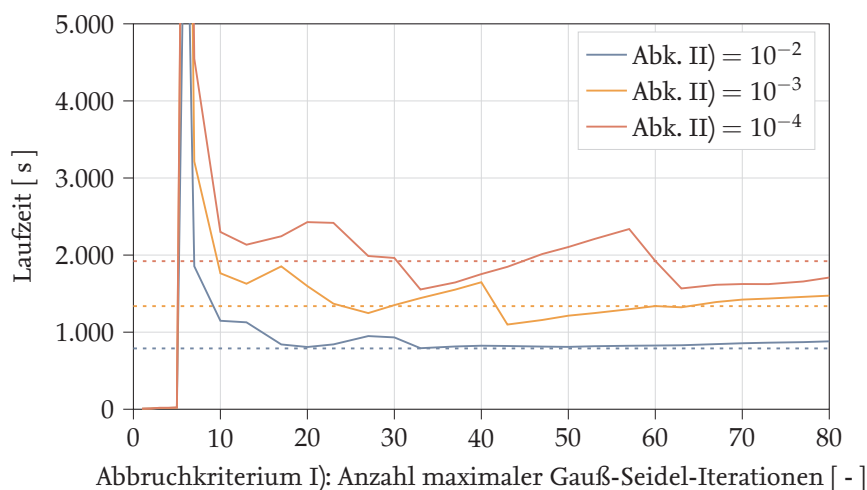
Für den Testfall der symmetrischen, laminaren Umströmung des NACA 0012 Profils sollen zum Schluss erneut die Varianten des vorangegangenen Abschnitts 5.2.1.7, jedoch mit einem 256 x 128 Startgitter, untersucht werden. Dafür sind die betreffenden Laufzeituntersuchungen der verschiedenen 2v-, 3v- und 4v-Mehrgitterzyklen in den Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16 aufgetragen.

Verglichen mit den Abbildungen des Abschnitts 5.2.1.7 weisen die drei Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16 ähnliche, aber in die Länge gezogene, Verläufe auf. Sodass charakteristische Merkmale der Graphen bei deutlich höheren Werten für die Abk. I) liegen. Des Weiteren sind sie, bezogen auf die Referenzmessungen, bei höheren Laufzeiten angesiedelt, sodass erst bei  $\text{Abk. I}) > 40$  Laufzeiten nahe der Referenzmessungen erreicht werden. Für große Werte des Abk. I) ist, hingegen der Abbildungen aus Abschnitt 5.2.1.7, kaum eine Drift zu höheren Laufzeiten zu verzeichnen. Auffällig ist ein spätes Abknicken der Laufzeit unter die Referenzmessungen, das für kleinere Abk. II) stärker ausgeprägt ist. Beispielfhaft in Abbildung 5.12, bei  $\text{Abk. II} = 10^{-3}$





Abbildungung 5.15: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem  $256 \times 128$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.



Abbildungung 5.16: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem  $256 \times 128$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben.

und  $\text{Abk I}) = 40$ , zu sehen.

Im Vergleich zu den Abbildungen 5.8, 5.9 und 5.10 liegen die Graphen der Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16 für tiefere Mehrgitterzyklen bei deutlich niedrigeren Laufzeiten. Für  $\text{Abk. I}) > 50$  sind die Laufzeiten jedoch minimal erhöht für tiefere Mehrgitterzyklen bei Verwendung der Linieninformationen.

Für die Abbildungen 5.14, 5.15 und 5.16 können somit die Beobachtungen formuliert werden, dass

1. die charakteristischen Merkmale der Graphen bei deutlich höheren Werten für die Abk. I) liegen, als beim  $128 \times 64$  Startgitter,



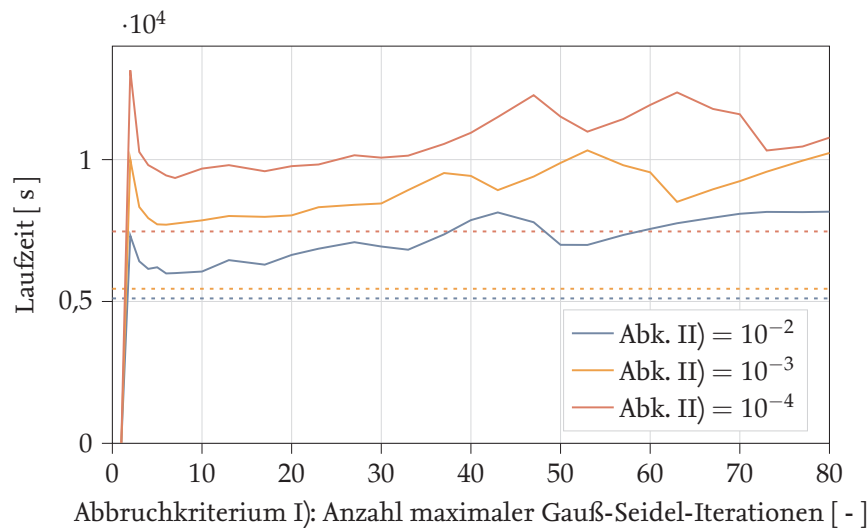


Abbildung 5.17: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben.

2. die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren meist oberhalb der Referenzmessungen liegen, und zudem
3. wenn Linieninformationen verwendet werden, die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren für tiefere Mehrgitterzyklen, trotz feinerem 256 x 128 Startgitter, für kleine Abbruchkriterien I) nicht extrem ansteigen.

## 5.2.2 | Ergebnisse: Turbulenter 2D Testfall RAE 2822

Im zweiten Teil werden die Ergebnisse der Untersuchungen vorgestellt, die sich mit der turbulenten Umströmung des 2D Profilschnitts des RAE 2822 befassen. Es wird erneut der qualitative Einfluss der Parametervariationen auf die Laufzeit der Lösungsalgorithmenskombinationen untersucht. Es werden approximativ diskretisierte Randwertprobleme der RANS-Gleichungen gelöst.

Alle Untersuchungen dieses Testfalls befassen sich ausschließlich mit einem 320 x 64 Startgitter, da die Laufzeit mit einem 640 x 128 Startgitter zu hoch ist.

### 5.2.2.1 | Block-symmetrischer-Gauß-Seidel-Glätter im 2v- und 3v-Mehrgitterzyklus mit 320 x 64 Startgitter

Begonnen wird mit Untersuchungen, die einen Block-symmetrischen-Gauß-Seidel-Glätter verwenden, der somit keine Linieninformationen verwendet. Die Laufzeitverläufe der Mehrgitterverfahren, während der Variation der Abbruchkriterien, sind für einen 2v- und 3v-Mehrgitterzyklus in den Abbildungen 5.17 und 5.18 zu finden.

Für einen 2v-Mehrgitterzyklus nehmen die Laufzeiten in Abbildung 5.17 zunächst leicht ab, um dann für größere Werte des Abk. I) zu höheren Laufzeiten zu steigen. Die gesamten Mehrgitterverfahren dieses Abschnittes liegen mit ihren Laufzeiten oberhalb der Referenzmessungen. Für einen 3v-Mehrgitterzyklus in Abbildung 5.18 kommt noch hinzu, dass erst bei verhältnismäßig hohen Werten für Abk. I)  $> 13$  die Mehrgitterverfahren auskonvergieren. Für

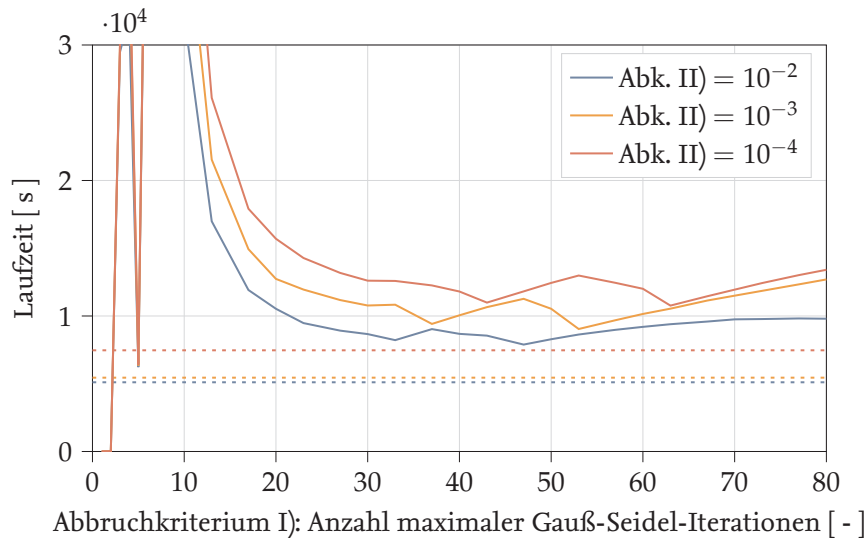


Abbildung 5.18: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben.

4v-Mehrgitterzyklen ist keine Abbildung aufgetragen, da diese bei Beispielrechnungen, auf gegebener Hardware, zu lange Rechenzeiten für eine Parametervariation aufweisen.

Es lässt sich für die Abbildungen 5.17 und 5.18 feststellen, dass

1. die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren erheblich über denen der Referenzmessungen liegen,
2. bei zunehmender Tiefe des Mehrgitterzyklusses, von 2v zu 3v, die Berechnungen erst bei höheren Abk. I) auskonvergieren und
3. die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren für tiefere v-Zyklen extrem ansteigen.

#### 5.2.2.2 | Block-symmetrischer-Linien-Gauß-Seidel-Glätter im 2v-, 3v- und 4v-Mehrgitterzyklus mit 320 x 64 Startgitter

Nun werden die gleichen Untersuchungen wie in Abschnitt 5.2.2.1 betrachtet, wenngleich der Glätter im linearen Mehrgitter, bei diesen Untersuchungen, die Linieninformationen verwendet. Die Laufzeitmessungen der Mehrgitterverfahren, zusammen mit den gepunkteten Referenzmessungen, sind für einen 2v-, 3v- und 4v-Mehrgitterzyklus in den Abbildungen 5.19, 5.20 und 5.21 aufgetragen. Variiert werden erneut die Abbruchkriterien I) und II).

Die Mehrgitterverfahren der drei genannten Abbildungen konvergieren schon bei einem Abk. I) > 3 aus. Zudem sind die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren, bei Werten von 4 bis ca. 23 für das Abk. I) und  $10^{-2}$  für das Abk. II), nennenswert kleiner, als die der schnellsten Referenzmessung. Wobei eine zunehmende Tiefe des Mehrgitterzyklusses für eine schnelle Laufzeit, im Bereich 4 bis 23 für Abk. I), zuträglich ist.

Für  $10^{-2}$  und  $10^{-3}$  als Abbruchkriterien II) nehmen die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren, ab ca. Abk. I) = 20, fortlaufend stark zu. Ausschließlich für Abk. II) =  $10^{-4}$  verringern sich die Laufzeiten bei Werten des Abk. I), die größer 34 und kleiner 57 sind.

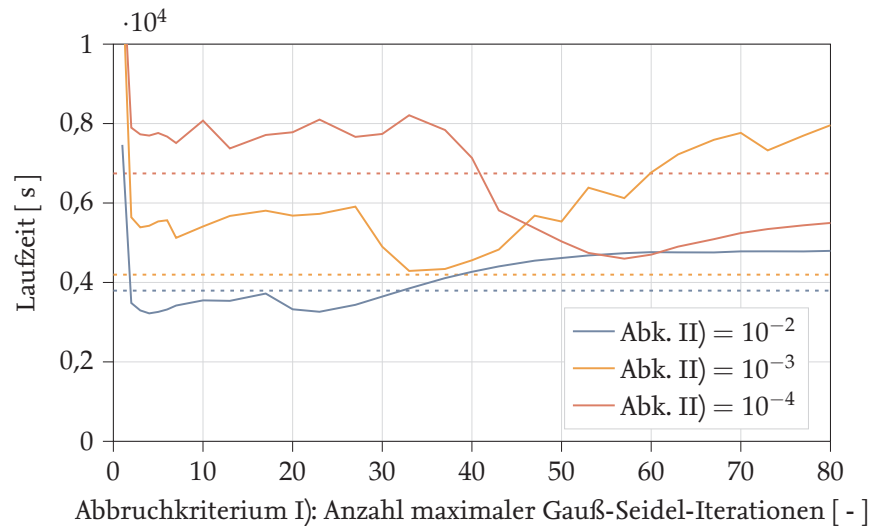


Abbildung 5.19: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem  $320 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben.

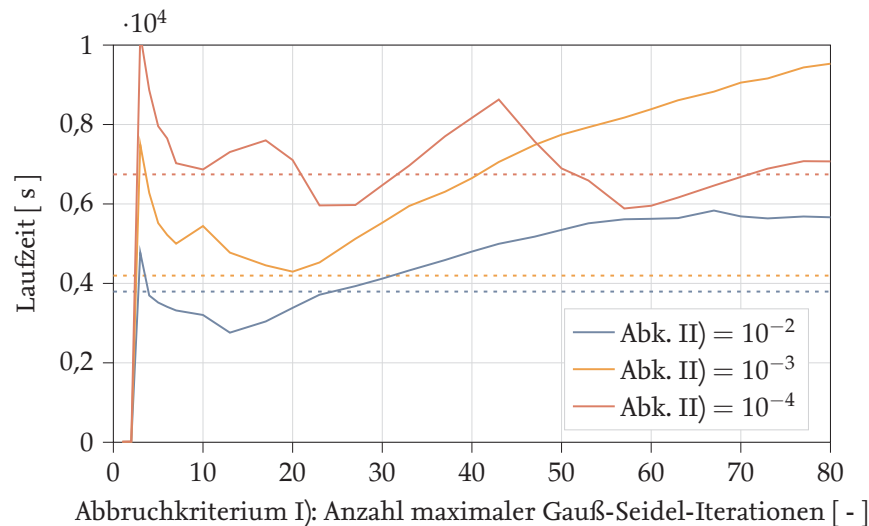


Abbildung 5.20: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem  $320 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben.

Es lassen sich die Beobachtungen, bezüglich der Abbildungen 5.19, 5.20 und 5.21, festhalten, dass

1. die Mehrgitterverfahren schon bei Abbruchkriterien  $I) > 3$  auskonvergieren,
2. die Laufzeiten der Mehrgitterverfahren für  $\text{Abk. I}) \in [4, 23]$ ,  $\text{Abk. II}) = 10^{-2}$  und zunehmende tiefere v-Zyklen erheblich schneller sind, als die schnellste Referenzmessung und
3. die Mehrgitterlaufzeiten für ein ansteigendes  $\text{Abk. I}) > 20$  in vielen Fällen sehr stark ansteigen können.

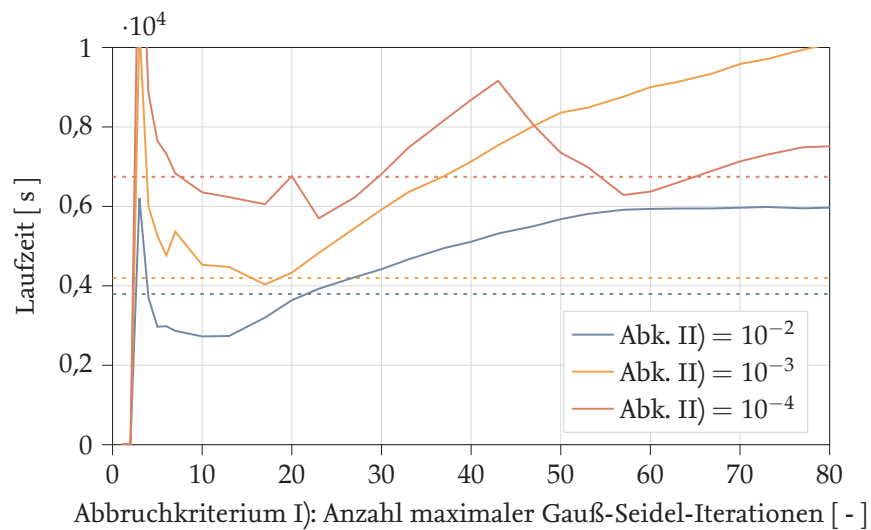


Abbildung 5.21: Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben.

# 6 | Auswertung und Beurteilung

Im folgenden Kapitel werden die Ergebnisse des vorangegangenen Kapitels 5 kondensiert, um einige Trends in den Laufzeiten der Mehrgitterverfahren bezüglich der Parametervariationen zu formulieren. Es sei an dieser Stelle gewarnt, dass natürlich keine allgemeingültigen Aussagen über die Parameterwahl getroffen werden können sondern nur für die betrachteten Testfälle aus Kapitel 5.

## 6.1 | Verschiedene Trends

### 6.1.1 | Abbruchkriterium I) und II)

Bezüglich aller untersuchter Parameterkombinationen haben sich für die Abbruchkriterien I) und II) drei Trends herauskristallisiert.

Wird für die Glättungsschritte im linearen Mehrgitterverfahren ein zu kleines Abbruchkriterium I) gewählt, dann konvergiert das nichtlineare Residuum der Berechnung nicht bis zum Abbruchkriterium III)  $= 10^{-14}$ . Das Verfahren bricht so gesehen vorzeitig ab, weil entweder das nichtlineare Residuum divergiert oder andere Abbruchkriterien der Lösungsalgorithmen erreicht werden. Diese anderen Abbruchkriterien sind dann meistens von der Natur, dass sie wiederholtes Aufrufen der selben Operation limitieren. Wie schon erwähnt, wird beispielsweise die Anzahl an linearen Mehrgitterschritten auf 10000 begrenzt.

Weiterhin konnte allgemein beobachtet werden, dass die Laufzeit einer Berechnung, für ein zunehmendes Abbruchkriterium II), abnimmt. Die schnellste, auskonvergierte Laufzeitmessung für jede Parametervariation oder Referenzmessung hatte ein Abbruchkriterium II)  $= 10^{-2}$ . Es führt demnach zu einer Reduktion der Laufzeit, wenn das Residuum des inneren linearen Gleichungssystems, um möglichst wenige Größenordnungen pro Runge-Kutta-Schritt, verringert wird. Es ist zu vermuten, dass es auch eine obere Grenze für das Abk. II) gibt, ab der die Verfahren divergieren, weil der Fehlerterm des inneren linearen Gleichungssystem dann nicht ausreichend reduziert wurde.

Die dritte globale Beobachtung hängt mit der vorangegangenen zusammen. Denn die Laufzeitverläufe über eine Variation von Abk. I) sind bei sich ändernder Abk. II) parallel verschoben. Es ergeben sich ähnliche Verläufe, die jedoch allgemein höhere oder niedrigere Laufzeiten aufweisen. Der Einfluss des Abk. II) scheint somit auf die Laufzeit von Berechnungen, unabhängig der Größenordnung von Abk. I), einen vergleichbaren Einfluss zu haben.

Weitere häufige Beobachtungen die gemacht wurden sind, dass, bei kleinen meist einstelligen Abk. I), häufig ein Minimum zu finden ist, das entweder breit ist oder von einem erneuten Anstieg der Laufzeit gefolgt wird. Zudem ist die Laufzeit für Abk. I)  $> 60$  entweder relativ gleichbleibend oder nimmt leicht zu.

### 6.1.2 | Linieninformationen

Die Hinzunahme von Linieninformationen in das einfache lineare Iterationsverfahren hat, bei beiden Testfällen und jeder Untersuchung zu einer Verringerung der Laufzeit geführt, sowohl für die Referenzmessungen, als auch das Mehrgitterverfahren. Das Block-symmetrische-Linien-Gauß-Seidel-Verfahren hat, insbesondere als Glätter in einem Mehrgitterverfahren und für ausgewählte Abk. I), häufig zu den schnellsten Laufzeiten geführt, die für einen Testfall erreicht wurden. Lediglich in Abschnitt 5.2.1.8 war dies nicht der Fall, dort konnte für ausgewählte Abk. I) nur ca. die Zeit der Referenzmessung erreicht werden.

### 6.1.3 | Lineares Mehrgitterverfahren

Das lineare Mehrgitterverfahren konnte bei dem laminaren Testfall aus Kapitel 5.1.1 lediglich auf dem groben 128 x 64 Rechengitter für 3v- und 4v-Mehrgitterzyklen deutlich schnellere Laufzeiten erzielen. Auf dem 256 x 128 Rechengitter war es ohne Linieninformationen erheblich langsamer als die Referenzmessungen. Mit Linieninformationen war es für einige Bereiche der Abk. I) zumindest nicht deutlich schlechter als die Referenzmessungen.

Bei dem turbulenten Testfall aus Kapitel 5.1.2 konnte es zusammen mit Linieninformationen und einem 4v-Mehrgitterzyklus mehr als  $\frac{1}{4}$  der Rechenzeit, im Vergleich zur Referenzmessung einsparen. Wurden keine Linieninformationen im Glätter verwendet, so war das Mehrgitterverfahren deutlich langsamer als die Referenzmessungen ohne lineares Mehrgitterverfahren. Abschließend lässt sich zu den Untersuchungen des linearen Mehrgitterverfahrens sagen, dass sich zwar die Laufzeit gegenüber den Referenzmessungen verändert hat, nicht aber die berechneten Strömungsgrößen und Ergebnisse. Es mag in einigen Fällen die Laufzeit mit Mehrgitterverfahren langsamer sein, aber die implementierten Lösungsalgorithmen sind augenscheinlich nicht schlechter.

## 6.2 | Beurteilung

Natürlich sind die untersuchten Testfälle und Gitterauflösungen nicht repräsentativ genug, um allgemeingültige Parameterempfehlungen auszusprechen. Es konnten lediglich, für eine begrenzte Anzahl an Testfällen und Gittern, einige Trends beleuchtet werden, die sich aus den Parametervariationen ergeben haben.

Des Weiteren ist nicht zu vernachlässigen, dass auch die Hardware einen Einfluss auf die Laufzeitverläufe haben kann, wenngleich die Linuxmaschine vor den Berechnungen neu gestartet wurde und während der Berechnungen nicht verwendet wurde.

Es erscheint schon für die wenigen Testfälle und die getroffenen Parameterwahlen ein schwieriges Unterfangen ein Verfahren zu finden, das laufzeittechnisch, für alle Kombinationen aus Testfällen und Gittern, gut ist. Ebenso fällt es schwer eine Empfehlung für ein lineares Mehrgitterverfahren auszusprechen, da die Referenzmessungen ohne lineares Mehrgitterverfahren in den Abschnitten 5.2.1.4, 5.2.1.5, 5.2.1.6 und 5.2.2.1 erheblich schneller waren.

# 7 | Zusammenfassung und Ausblick

Untersucht wurde die Laufzeit von Lösungsalgorithmen, die die diskretisierten Randwertprobleme der Navier-Stokes- und RANS-Gleichungen approximativ lösen. Das nach Linearisierung entstehende innere lineare Gleichungssystem wurde mittels eines linearen Mehrgitterverfahrens approximativ gelöst und in den äußeren nichtlinearen Lösungsalgorithmus eingespeist. Die vorliegende Arbeit hatte zur Aufgabe Untersuchungen bezüglich der Laufzeit für verschiedene Abbruchkriterien und Parametervariationen des linearen Mehrgitters durchzuführen.

Zur gezielten und automatisierten Parametervariation wurde ein Wrapper für den verwendeten RK Forschungscode des DLR's in Python implementiert. Betrachtet wurde in den Ergebnissen die Entwicklung der Laufzeit der Berechnungen über den verschiedenen Abbruchkriterien des linearen Mehrgitters. Die genannten Abbruchkriterien sind die Anzahl an zugelassener Glättungsschritte pro Mehrgitterzyklus im linearen Mehrgitterverfahren sowie das Abbruchkriterium für das lineare Residuum pro nichtlinearen Iterationsschritt.

Das lineare Mehrgitterverfahren bringt sehr viele Parameter mit sich. Diese so abzustimmen, dass die Laufzeit optimiert wird scheint zu keinem allgemeingültigen Parametersatz zu führen und muss individuell für den Testfall und den Lösungsalgorithmus optimiert werden.

Für die Ergebnisse lässt sich zusammenfassend sagen, dass es bereits für die zwei gegebenen Testfälle schwierig ist eine Parameterwahl zu finden, die ein laufzeittechnisch gutes Verfahren zur Folge hat.

Aufbauende Untersuchungen könnten zum Ziel haben eine automatische Parameteroptimierung zu implementieren. Wenn es möglich ist glattere Verläufe der Laufzeit über die Parametervariationen zu erstellen, wäre es denkbar, dass das Minimum in der Laufzeit mit einer Intervallhalbierung gefunden werden kann.

Um glattere Laufzeitverläufe zu erzielen, könnte ein Ensemble-Mittelwert über mehrere Berechnungsdurchgänge gebildet werden. Dabei sei angemerkt, dass während der Bearbeitung dieser Arbeit Versuche auf dem Cluster des DLR unternommen wurden, um einen Ensemble-Mittelwert aus mehreren Berechnungen zu bilden. Leider unterlagen die gemessenen Laufzeiten des Clusters so extremen Schwanken, dass sie nicht auswertbar erscheinen.

Final lässt sich anmerken, dass die Referenzmessungen ohne lineares Mehrgitter meist schon gute Laufzeiten ergeben haben.





# Literaturverzeichnis

- [1] C. L. Fefferman, "Existence and smoothness of the Navier-Stokes equation," Clay Mathematics Institute (CMI), Tech. Rep., 2000.
- [2] J. Bey, Finite-Volumen- und Mehrgitter-Verfahren für elliptische Randwertprobleme. B.G.Teubner Stuttgart - Leipzig, 1998.
- [3] C. Windeck, "Intel-Chef verabschiedet sich vom bisherigen "Moore's Law"," 2015.
- [4] S. Langer, "Preconditioned Newton methods to approximate solutions of the Reynolds averaged Navier-Stokes equations," Habilitation, Universität Kassel, 2018.
- [5] H. Oertel and E. Laurien, Numerische Strömungsmechanik : Grundgleichungen, Lösungsmethoden, Softwarebeispiele. Springer Fachmedien Wiesbaden, 2015.
- [6] J. Blazek, Computational Fluid Dynamics: Principles and Applications: Third Edition. Butterworth-Heinemann, 2015.
- [7] A. Favre, "Equations des gaz turbulents compressibles," Journal de mécanique, 1965.
- [8] S. Langer, "Agglomeration multigrid methods with implicit Runge-Kutta smoothers applied to aerodynamic simulations on unstructured grids," Journal of Computational Physics, 2014.
- [9] J. Rotta, Turbulente Strömungen: eine Einführung in die Theorie und ihre Anwendung. Univ.-Verlag Göttingen, 2010.
- [10] P. R. Spalart and S. R. Allmaras, "One-equation turbulence model for aerodynamic flows," Recherche aerospaciale, 1994.
- [11] R. C. Swanson and E. Turkel, "On central-difference and upwind schemes," Journal of Computational Physics, 1992.
- [12] E. Turkel, "Improving the accuracy of central difference schemes," in 11th International Conference on Numerical Methods in Fluid Dynamics, 2008.
- [13] S. Langer, "Investigation and application of point implicit Runge-Kutta methods to inviscid flow problems," International Journal for Numerical Methods in Fluids, 2012.
- [14] H. R. Schwarz and N. Köckler, Numerische Mathematik. Vieweg+Teubner, 2011.
- [15] S. Langer, "Hierarchy of preconditioning techniques for the solution of the Navier-Stokes equations discretized by 2nd order unstructured finite volume methods," in ECCOMAS 2012 - European Congress on Computational Methods in Applied Sciences and Engineering, e-Book Full Papers, 2012.

- [16] W. Hackbusch, Iterative Lösung großer schwachbesetzter Gleichungssysteme. B. G. Teubner Stuttgart, 1991.
- [17] A. Brandt, “Guide to multigrid development,” in Guide to multigrid development, 1982.
- [18] W. Hackbusch, Multi-Grid Methods and Applications. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1985.
- [19] N. Köckler, Mehrgittermethoden. Vieweg+Teubner Verlag | Springer Fachmedien Wiesbaden, 2012.
- [20] I. Moulitsas and G. Karypis, “Multilevel Algorithms for Generating Coarse Grids for Multigrid Methods,” in SC '01: Proceedings of the 2001 ACM/IEEE Conference on Supercomputing, Nov 2001.
- [21] D. J. Mavriplis, “Directional Coarsening and Smoothing for Anisotropic Navier-Stokes Problems,” Electronic Transactions on Numerical Analysis, 1997.
- [22] —, “Directional Agglomeration Multigrid Techniques for High-Reynolds-Number Viscous Flows,” AIAA Journal, vol. 37, no. 10, pp. 1222–1230, 1999.
- [23] J. V. Lassaline and D. W. Zingg, “Development of an Agglomeration Multigrid Algorithm with Directional Coarsening,” in 14th Computational Fluid Dynamics Conference, 1999.
- [24] A. Brandt, “Multi-Level Adaptive Solutions to Boundary-Value Problems,” Mathematics of Computation, 1977.
- [25] R. C. Swanson and S. Langer, “Steady-state laminar flow solutions for NACA 0012 airfoil,” Computers and Fluids, 2016.
- [26] P. Cook, M. McDonald, and M. Firmin., AGARD Advisory Report No. 138 EXPERIMENTAL DATA BASE FOR COMPUTER PROGRAM ASSESSMENT, 1979.

# Abbildungsverzeichnis

2.1	Dargestellt ist das Kontrollvolumen $\Omega$ mit der Oberfläche $\partial\Omega$ und den Oberflächenelementen $dS$ . Beispielfhaft greifen eine Druckkraft $p\vec{n}dS$ normal sowie eine Schubkraft $\tau \cdot \vec{n}dS$ tangential an. Des Weiteren sind stellvertretend drei Stromlinien, die von links nach oben rechts zeigen, eingezeichnet und der daraus resultierende Geschwindigkeitsvektor $\vec{u}$ auf einem Oberflächenelement. . .	6
2.2	Dargestellt sind die Randbedingungen verschiedener Randwertprobleme, die bei der Umströmung eines Objektes vorkommen können. Die Gleichungen, die das reibungsfreie Umströmungsproblem betreffen, sind mit ① versehen. Für das laminare, reibungsbehaftete und das turbulente, reibungsbehaftete Umströmungsproblem sind die zugehörigen Gleichungen mit ② und ③ beschriftet.	12
2.3	Die geometrische Entstehung (mittig) eines Dualgitters (rechts) aus einem Primärgitter (links). . . . .	13
2.4	Der Zellschnittflächen-Einheitsnormalenvektor $\vec{n}_{ij}$ steht auf der Schnittfläche $\Omega_i \cap \Omega_j$ zweier Zellen $\Omega_i$ und $\Omega_j$ der Punkte $i$ und $j$ . . . . .	13
3.1	Dargestellt ist das mit der Gitterbreite $h$ diskretisierte Intervall $[0, 1]$ und seine $n$ gleichgroßen Kontrollvolumen $\Omega_i$ , mit $i = 1, \dots, n$ . . . . .	26
3.2	Summe aus langwelligem und kurzwelligem Fehlerterm auf dem feinen Gitter nach 0 bis 20 Gauß-Seidel-Iterationsschritten . . . . .	28
3.3	Vorwiegend langwelliger Fehlerterm erscheint auf dem gröberen Gitter kurzwellig und wird nach 0 bis 20 zusätzlichen Gauß-Seidel-Iterationsschritten auf dem gröberen Gitter geglättet. . . . .	29
3.4	Vergleich der Fehlerterme nach jeweils insgesamt 40 Gauß-Seidel-Iterationsschritten. $r_i^{(40)}$ stellt den Fehlerterm nach 40 Iterationsschritten auf dem feinen Gitter dar und $r_j^{(20)}$ stellt den Fehlerterm nach der Kombination aus 20 Iterationsschritten zuerst auf dem feinen und dann dem gröberen Gitter dar. . . . .	29
3.5	Auf der linken Seite befindet sich ein willkürliches polyedrisches Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit seinem Rand $\partial\Omega$ . In der Mitte sowie auf der rechten Seite befinden sich mögliche Dualgitter der Triangulierungen für die Gitterlevel $J, J - 1$ sowie $J - 2$ .	30
3.6	Vier Dualgitterzellen des Gitterlevels $J$ werden zu einer einzigen Zelle $C_1^{(J-1)}$ agglomeriert, nach [8]. . . . .	34

4.1	Zusammenspiel einiger, in vorangegangenen Kapiteln vorgestellter, Bestandteile des Lösungsalgorithmusses: ①: Äußeres, nichtlineares Iterationsverfahren zum approximativen Lösen des nichtlinearen Gleichungssystems eines diskretisierten Randwertproblems der RANS-Gleichungen ②: Dreistufiges Runge-Kutta-Verfahren zum Stabilisieren des äußeren, nichtlinearen Iterationsverfahrens ③: Approximatives Lösen des inneren, linearen Gleichungssystems $\text{Prec}_s \cdot \vec{h} = \vec{R}(\vec{W}^{(s-1)})$ , $\{s \in \mathbb{N}   1 \leq s \leq 3\}$ , mittels eines linearen Mehrgitterverfahrens ④: 2v-Mehrgitterzyklus zur Reduktion der Fehlerterme im linearen Mehrgitter ⑤: Abbruchkriterium I) des einfachen, linearen Iterationsverfahrens während des Vorglätzens, der Grobgitterkorrektur sowie dem Nachglätten innerhalb eines Mehrgitterzyklusses ⑥: Abbruchkriterium II) der Abfolge von Mehrgitterzyklen des linearen Mehrgitters innerhalb eines Runge-Kutta-Schrittes ⑦: Abbruchkriterium III) des approximativen Lösens des nichtlinearen Gleichungssystems . . . . .	39
5.1	Beispielhafte Darstellungen des 128 x 64 Gitters für das NACA 0012 Profil . . . .	46
5.2	Auskonvergiertes Residuum des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses beim approximativen Lösen des laminaren NACA 0012 Testfalls auf einem 128 x 64 Rechengitter . . . . .	47
5.3	Auskonvergiertes Residuum des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses beim approximativen Lösen des laminaren NACA 0012 Testfalls auf einem 256 x 128 Rechengitter . . . . .	47
5.4	Auskonvergiertes Residuum des nichtlinearen Lösungsalgorithmusses beim approximativen Lösen des turbulenten RAE 2822 Testfalls auf einem 320 x 128 Rechengitter . . . . .	48
5.5	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	50
5.6	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	52
5.7	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	53
5.8	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	54
5.9	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	55

5.10	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	56
5.11	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	57
5.12	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	58
5.13	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 128 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	58
5.14	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	59
5.15	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	60
5.16	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 4v-Mehrgitterzyklen mit einem 256 x 128 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.1 beschrieben. . . . .	60
5.17	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben. . . . .	61
5.18	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden keine Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben. . . . .	62
5.19	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 2v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben. . . . .	63
5.20	Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von 3v-Mehrgitterzyklen mit einem 320 x 64 Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben. . . . .	63

- 5.21 Laufzeit der Berechnungen über dem Abbruchkriterium I) aufgetragen, bei Variation des Abbruchkriteriums II). Die Glättungsschritte verwenden Linieninformationen und finden innerhalb von  $4v$ -Mehrgitterzyklen mit einem  $320 \times 64$  Startgitter statt. Der Testfall ist in Kapitel 5.1.2 beschrieben. . . . . 64

# Tabellenverzeichnis

5.1	Übersicht der untersuchten Testfälle, Gittergrößen und ausgewählten Parameter	45
5.2	Übersicht der Daten des jeweilig schnellsten Mehrgitterverfahrens und der schnellsten Referenzmessung für jede der Abbildungen in Kapitel 5.2. Das Abk. II) besitzt daher für alle Untersuchungen dieser Tabelle den Wert $10^{-2}$ .	49





**DLR-IB-AS-BS-2020-21**

**Lineares Mehrgitter zum Lösen der RANS Gleichungen**

**Jörn Niklas Kersken**

Verteiler:

Institutsbibliothek	1 Exemplar
Verfasser	5 Exemplare
Institutsleitung	1 Exemplar
Abteilungsleiter	1 Exemplar
Deutsche Bibliothek in Frankfurt/Main	2 Exemplare
Niedersächsische Landesbibliothek Hannover	1 Exemplar
Techn. Informationsbibliothek Hannover	1 Exemplar
Zentralbibliothek BS	2 Exemplare
Zentralarchiv GÖ	1 Exemplar
Reserve	5 Exemplare